人大附中 2023~2024 学年度第二学期高一年级数学期中练习

2024 年 4 月 23 日

制卷人：宁少华 王鼎　　审卷人：吴中才

说明：本试卷共六道大题，共 7 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟

第Ⅰ卷（共18题，满分100分）

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置．）

1．在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=$（　）

A．$\overrightarrow{CA}$　　B．$\overrightarrow{AC}$　　C．$\overrightarrow{BD}$　　D．$\overrightarrow{DB}$

2．已知角 α 终边一点 $P(1,y)$，若 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，则 y 的值为（　）

A．$\sqrt{5}$　　B．2　　C．$\pm\sqrt{5}$　　D．±2

3．下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 单调递增的是（　）

A．$y=\tan x$　　B．$y=\sin x$　　C．$y=\cos x$　　D．$y=x\sin x$

4．已知 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{CP}$，则（　）

A．$\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$　　B．$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

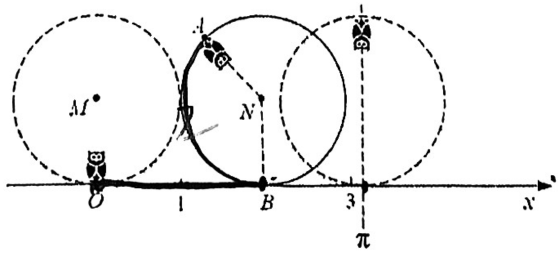
C．$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$　　D．$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

5．把函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图像按向量 $\boldsymbol{m}=\left(-\frac{\pi}{6},1\right)$ 平移后，得到新函数的解析式为（　）

A．$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$　　B．$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1$

C．$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$　　D．$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$

6．在人大附中 π 节活动的入场券中有如下图形，单位圆 M 与 x 轴相切于原点 O，该圆沿 x 轴向右滚动，当小猫头鹰位于最上方时，其对应 x 轴的位置正好是 π，若在整个运动过程中当圆 M 滚动到与出发位置时的圆相外切时（此时记圆心为 N），此时小猫头鹰位于 A 处，圆 N 与 x 轴相切于 B，则劣弧 AB 所对应的扇形面积是（　）



A．1　　B．2　　C．$\frac{\pi}{3}$　　D．$\frac{\pi}{4}$

7．已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\ \omega\neq 0)$，则“$\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$”是“$f(x)$为偶函数”的（　）

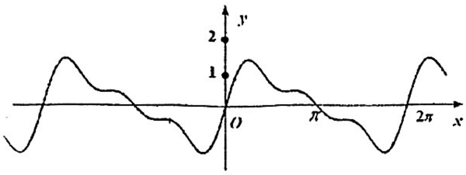
A．充分不必要条件　　　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　　　D．既不充分也不必要条件

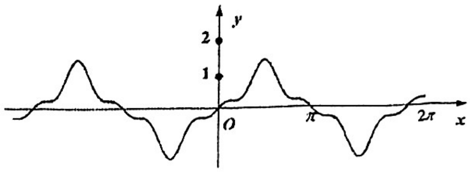
8．已知O为坐标原点，P是α终边上一点，其中$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，$|\overrightarrow{OP}|=4$，非零向量$\boldsymbol{a}$的方向与x轴正方向相同，若$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{\lambda}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$，$\lambda\in[0,5]$，则$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}|$取值范围是（　）

A．$\left[\dfrac{16}{5},3\right]$　　B．$\left[\dfrac{12}{5},3\right]$　　C．$\left[\dfrac{16}{5},4\right]$　　D．$\left[\dfrac{12}{5},4\right]$

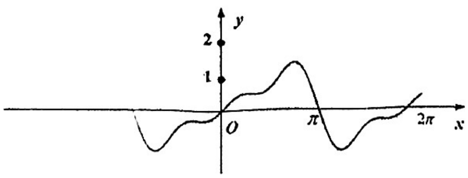
9．函数$f(x)=\sin x+\dfrac{\sin 3x}{3}+\dfrac{\sin 5x}{5}$图像可能是（　）



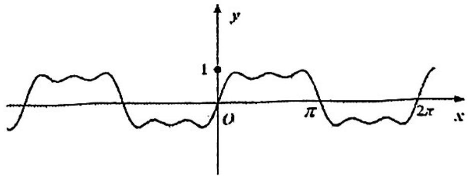
A.



B.



C



D.

10．已知函数$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，下列结论错误的是（　）

A．$f(x)$的图像有对称轴

B．当$x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)$时，$\cos x<f(x)<1$

C．$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$有最小值

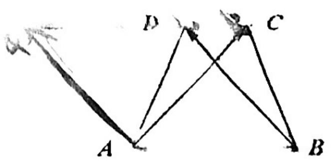
D．方程$f(x)=-\cos x\ln x$在$(1,\pi)$上无解

二、填空题（本大题共5小题，每小题5分，共25分．请把结果填在答题纸上的相应位置．）

11．若$\sin\theta=\dfrac{3}{4}$，则$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=$__________．

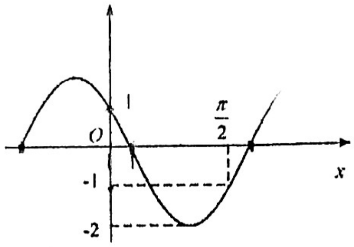
12．能使“$\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha$”成立的一个$\alpha$的值为__________．

13．四边形$ABCD$中，$\overrightarrow{AB}=t\overrightarrow{DC}$，且$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}+\mu\overrightarrow{BD}$，若$\lambda-\mu=\dfrac{4}{3}$，则$t=$__________．



14．已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\ \omega>0,\ |\varphi|<\pi)$的部分图像如图所示，

则$\omega=$________，$\varphi=$________．



15．已知$n\in\mathbf{N}$，$n\geq 2$．在$\Omega=\{x|x=(x_1,x_2,\cdots x_n),\ x_i\in\mathbf{R},\ i=1,2,\cdots,n\}$中，

设$\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)$，$\mathbf{e}=(1,1,\cdots,1)$，$\forall a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in\Omega$，

定义：$a+b=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$；$a\otimes b=(a_1b_1,a_2b_2,\cdots,a_nb_n)$；$|a|=\sum^{n}|a_i|$．

设$T=\{(x_1,x_2,\cdots x_n)|x_i=0\text{或}1,\ i=1,2,\cdots,n\}$．给出下列四个结论：

① $\forall a,b,c\in\Omega$，$(a+b)\otimes c=(a\otimes c)+(b\otimes c)$；

② $\forall a,b\in\Omega$，$|a\otimes b|\leq|a||b|$；

③ 若$x,y\in T$，$x\otimes y=x$，则$y=\mathbf{e}$；

④ $\forall x,y\in T$，$x\neq y$，都有$x\otimes y=\mathbf{0}$，则T最多有$n+1$个元素．

其中所有正确结论的序号是________．

三、解答题（本大题共3小题，共35分，解答应写出文字说明过程或演算步骤，请将答案写在答题纸上的相应位置.）

16.（本小题11分）

已知函数$y=\cos x+a$的最大值为2，将其图像向右平移$\frac{\pi}{6}$得到函数$y=f(x)$的图像；把$y=f(x)$图像上的所有点纵坐标不变，横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$，得到$y=g(x)$的图像.

（Ⅰ）求$y=g(x)$的解析式和最小正周期；

（Ⅱ）求$y=g(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的单调递减区间.

17.（本小题 12 分）

已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,\ |\varphi|<\frac{\pi}{2})$.

（Ⅰ）若 $f(0)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，求 φ 的值；

（Ⅱ）已知 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$ 上单调递增，$f(\frac{2\pi}{3})=\sqrt{2}$，再从条件 ①，条件 ②，条件 ③这三个条件中选择一个作为已知，使函数 $f(x)$ 存在，求 ω,φ 的值.

条件 ①：$f(\frac{\pi}{3})-\sqrt{3}$；

条件 ②：$f(\frac{\pi}{6})=0$；

条件 ③：$\forall a\in R$，$f(x)$ 在区间 $[a,a+2\pi]$ 上至少 2 个零点.

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

18.（本小题 12 分）

在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，$A(2,4)$，$B(3,1)$，$C(1,2)$，$\overrightarrow{CD}//\overrightarrow{OB}$，$|\overrightarrow{OD}|=5$.

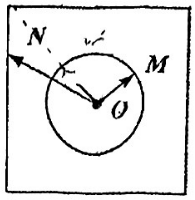
（Ⅰ）求 $\overrightarrow{OD}$ 的坐标；

（Ⅱ）已知 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}$，且 $\left||\overrightarrow{OM}|-|\overrightarrow{MD}|\right|=|\overrightarrow{OD}|$，求 λ 的值.

第Ⅱ卷（共11道题，满分50分）

一、选择题（共6小题，每小题4分，共24分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置.）

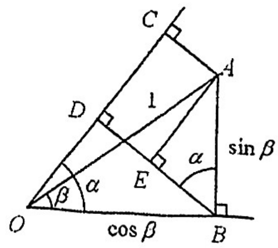
19．如图，边长为4的正方形中心与单位圆圆心O重合，M,N分别在圆周上，正方形的四条边上运动，则$|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}|$的取值范围是（　　）



A．$\left[1,2\sqrt{2}\right]$　　B．$\left[1,2\sqrt{2}+1\right]$

C．$\left[\sqrt{2},2\sqrt{2}\right]$　　D．$\left[\sqrt{2},2\sqrt{2}+1\right]$

20．古希腊数学家帕普斯（Pappus，约A.D.290—A.D.350）利用如图所示的几何图形，由$|OC|=|OD|+|CD|$直观简洁地证明了当α,β为锐角时的一个三角函数公式，这个公式是（　　）



A．$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

B．$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

D．$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

C．$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

21．已知函数$f(x)=\tan x(\sin x+\cos x+1)(\sin x+\cos x-1)$，下列说法正确的是（　　）

A．$f(x)$图像关于原点对称，且最小值为0

B．$f(x)$图像关于原点对称，且最大值为2

C．$f(x)$图像关于y轴对称，且最小值为0

D．$f(x)$图像关于y轴对称，且最大值为2

22．下列函数中，满足“$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(nx)\le nf(x)$”的是（　　）

A．$y=|\cos x|$　　B．$y=|\sin x|$

C．$y=\cos|x|$　　D．$y=\sin|x|$

23．若$e^x+a\sin x-\cos x\ge 0$在$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$恒成立，则$a$的取值范围是（　　）

A．$[0,+\infty)$　　B．$\left[-e^{\frac{\pi}{2}},+\infty\right)$

C．$\left[-e^{\frac{\pi}{2}},0\right]$　　D．$\left[0,e^{\frac{\pi}{2}}\right]$

24. 已知$A\left(x_1,\frac{x_1^2}{4}\right)$，$B\left(x_2,\frac{x_2^2}{4}\right)$，$C(0,2)$三点共线，其中$x_1\neq x_2$，点$A$关于$y$轴的对称点为点$D$，给出下面四个结论：

① $\triangle AOB$不可能为等边三角形；

② 设$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，则当$\lambda\mu$最大时，$x_1+x_2=0$；

③ $x_1x_2=-8$；

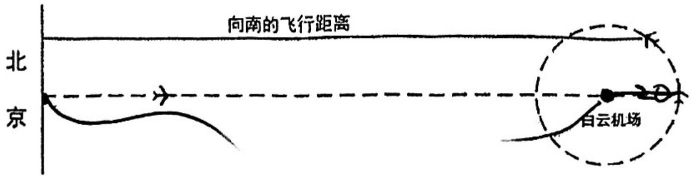
④ 当AB不与y轴垂直时，直线BD过定点.

其中正确结论的个数为（　　）

A. 1　　　B. 2　　　C. 3　　　D. 4

二、填空题（共4小题，每小题4分，共16分，把答案填在答题纸上的相应位置.）

25. 一架飞机从北京向南飞行1935公里到达广州，假设在广州白云国际机场上空的等待航线是圆形，飞机到达机场上空后，继续沿原航线向南飞行20公里后，开始在直径40公里的圆形等待航线上飞行，飞机每15分钟飞行一周，如图所示，设飞机在等待航线上飞行的时间为t小时，飞机从北京出发向南的飞行距离为$f(t)$，$f(t)$可以近似地表示为$f(t)=1935+A\cos\omega t$（$A>0$，$\omega>0$），则$A=$__________，$\omega=$__________.



26. 若$f(x)=2\sin(x+\varphi)+\cos x$的最大值为3，则$\varphi=$__________.

27. 已知向量$\boldsymbol{m}=(a+\cos x,1)$，$\boldsymbol{n}=(-1,a+\cos y)$，则集合$\{a\in\mathbf{R}|\exists x,y\in\mathbf{R},\ \boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n}\}$中的所有元素之和为__________.

28. 在现实生活中，一个符合实际的函数模型经常是将不同的函数组合得到的，如听音乐家演奏音乐时，我们听到的声音常常就是多种不同乐器产生的声波叠加的结果. 在学习了向量和三角函数后，人大附中某研学小组利用所学知识研究若干振幅相同，同频同向的简谐波叠加后，得到新的简谐波的振幅和初相规律，该小组把

$$x_i=a\cos\left[\omega t+(i-1)\theta_0\right],\ i=1,2,\cdots,N(N\text{为正整数})$$

叠加，研究$x_i=A\cos(\omega t+\varphi)$中的$A$和$\varphi$，其中$a>0$，$\omega>0$，$A>0$，$0\le\varphi<2\pi$.

（1）当$a=\omega=1$，$\theta_0=\frac{\pi}{3}$，$N=3$时，$A=$__________，$\varphi=$__________.

（2）当$a=2$，$\theta_0=\frac{\pi}{12}$，$N=11$时，$A=$__________，$\varphi=$__________.

三、解答题（本小题10分，解答应写出文字说明过程或演算步骤，请将答案写在答题纸上的相应位置.）

29.（本小题10分）

已知$n\in\mathbf{N}^*$，$n\geq 2$，$a=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为n维向量，若$-1<x_i<1$，$i=1,2,\cdots,n$，则称a为可聚向量. 对于可聚向量a实施变换T：把$a=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的某两个坐标$x_i,x_j\ (i\neq j)$删除后，添加$\dfrac{x_i+x_j}{1+x_ix_j}$作为最后一个坐标，得到一个$n-1$维新向量$a(1)$. 如果$a(1)$为可聚向量，可继续实施变换$T$，得到新向量$a(2)$，……，如此经过$k$次变换后得到的向量记为$a(k)$. 特别的，二维可聚向量变换后得到一个实数. 若向量a经过若干次变换后结果为实数，则称该实数为向量a的聚数.

（Ⅰ）设$a=\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)$，直接写出$a(1)$的所有可能结果；

（Ⅱ）求证：对于任意一个$n\ (n\geq 2)$维可聚向量a，变换T总可以进行$n-1$次；

（Ⅲ）设$a=\left(-\dfrac{5}{7},-\dfrac{1}{6},-\dfrac{1}{5},-\dfrac{1}{4},\dfrac{5}{6},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{6}\right)$，求$a$的聚数的所有可能结果.