人大附中 2023~2024 学年度第二学期高一年级数学期中练习

数学参考答案

I 卷

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）A	（2）D	（3）D	（4）A	（5）C
（6）A	（7）A	（8）D	（9）D	（10）D

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$-\dfrac{3}{4}$　　（12）$\dfrac{3\pi}{8}$（答案不唯一 $\alpha=k\pi+\dfrac{3\pi}{8}$ 都可以）

（13）$t=2$　　（14）$\omega=2,\varphi=\dfrac{5\pi}{6}$（第一个空三分，第二个空两分）

（15）①②④（答对一个得 2 分，答对两个得 4 分，全答对得 5 分，错不等分）

三、解答题（本大题共 3 小题，共 35 分）

16.（本小题 11 分）

【解】（1）$f(x)=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+1$,-------3 分

周期 $T=\pi$ ------2 分

（2）令 $2k\pi\le 2x-\dfrac{\pi}{6}\le 2k\pi+\pi$ --------2 分

解得 $k\pi+\dfrac{\pi}{12}\le x\le k\pi+\dfrac{7\pi}{12},k\in Z$ --------2 分

$\because x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$

所以减区间：$\left[-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{5\pi}{12}\right],\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{2}\right]$-----2 分（一个区间 1 分）

17.（本小题 12 分）

【解】:

（I）因为 $f(x)=\sqrt{2}\sin(\omega x+\varphi)$.

由 $f(0)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，----1 分

得 $\sin\varphi=-\frac{1}{2}$． ------1 分

又因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，------1 分

所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$． --------1 分

（II）选择条件 ②： $f(\frac{\pi}{6})=0$．

因为 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$，所以 $f(x)$ 的最小值为 $-\sqrt{2}$，最大值为 $\sqrt{2}$，-----2 分

又因为 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$ 上单调递增，且 $f(\frac{\pi}{6})=0$， $f(\frac{2\pi}{3})=\sqrt{2}$，

所以由三角函数的性质得 $\frac{T}{4}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，故 $T=2\pi$． ------2 分

因为 $\omega>0$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=1$，------1 分

$f(x)=\sin(x+\varphi)$． ------1 分

由 $\sin(\frac{\pi}{6}+\varphi)=0$，得 $\varphi=k\pi-\frac{\pi}{6}\ (k\in\mathbf{Z})$． -----1 分

又因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$． ----1 分

选择条件 ③： $\forall a\in R$, $f(x)$ 在区间 $[a,a+2\pi]$ 上至少 2 个零点

因为 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$，所以 $f(x)$ 的最小值为 $-\sqrt{2}$，最大值为 $\sqrt{2}$． -----1 分

因为 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$ 上单调递增，所以 $\frac{T}{2}\geq\pi\ \therefore T\geq 2\pi$,，-----1 分

$\forall a\in R$, $f(x)$ 在区间 $[a,a+2\pi]$ 上至少 2 个零点，所以 $2\pi\geq T$ -----2 分

故 $T=2\pi$． 因为 $\omega>0$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=1$，------1 分

$f(x)=\sin(x+\varphi)$． ------1 分

有 $f(\frac{2\pi}{3})=\sqrt{2}$，由 $\sin(\frac{2\pi}{3}+\varphi)=1$，得 $\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{6}\ (k\in\mathbf{Z})$． -----1 分

又因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$． -----1 分

18.（本小题 12 分）

【解】:

（I）设 $\overrightarrow{OD}=(4,3)$ 或 $\overrightarrow{OD}=(-5,0)$，因为 $|\overrightarrow{OD}|=5$，所以 $x^2+y^2=25$ ----①--1 分

$\because \overrightarrow{CD}=(x-1,y-2),\overrightarrow{OB}=(3,1)$ 且 $\overrightarrow{CD}//\overrightarrow{OB},\ \therefore 3y-6=x-1$，即 $x=3y-5$--②--1 分

①②联立得$\begin{cases}x^2+y^2=25\\x=3y-5\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=-5\\y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}$，----2 分（一个答案一分）

所以$\overrightarrow{OD}=(4,3)$或$\overrightarrow{OD}=(-5,0)$-----2 分（一个答案 1 分）

（II）

因为$\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}$， M 在直线 AB 上

因为$\left\|\overrightarrow{OM}\right|-\left|\overrightarrow{MD}\right\|=\left|\overrightarrow{OD}\right|$， 当且仅当$\overrightarrow{OM}$ 与 $\overrightarrow{MD}$ 反向, 所以$\overrightarrow{OM}//\overrightarrow{OD}$-----1 分

$\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}=\lambda(2,4)+(1-\lambda)(3,1)=(3-\lambda,1+3\lambda)$----1 分

当$\overrightarrow{OD}=(4,3)$时

$(3-\lambda,1+3\lambda)//(4,3)\therefore 4+12\lambda=9-3\lambda\therefore\lambda=\frac{1}{3}\therefore\overrightarrow{OM}=\left(\frac{8}{3},2\right),\therefore\overrightarrow{MD}=\left(\frac{4}{3},1\right)$--1 分

$\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{MD}$，不满足题意，舍去---1 分

当$\overrightarrow{OD}=(-5,0)$时，

$(3-\lambda,1+3\lambda)//(-5,0)\therefore -5+15\lambda=0\therefore\lambda=-\frac{1}{3}\therefore\overrightarrow{OM}=\left(\frac{10}{3},0\right),\overrightarrow{MD}=\left(-\frac{25}{3},0\right)$ 1 分

$\overrightarrow{OM}=-\frac{5}{2}\overrightarrow{MD}$，满足题意,，所以$\lambda=-\frac{1}{3}$--1 分

第 II 卷

一、选择题（共 6 小题，每小题 4 分）

（19）B （20）B （21）C （22）B （23）B （24）D

二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分）

（25）. $A=20,\omega=8\pi$（每空 2 分）

（26）. $\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$

（27）.0

（28）. （1）$A=2,\varphi=\frac{\pi}{3}$ （2）$A=2\cot\frac{\pi}{24},\varphi=\frac{5\pi}{12}$（每个空 1 分）

（29）**【解】**:（Ⅰ）$\vec{a}_1$ 的所有可能结果$\vec{a}_1=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right),\vec{a}_1=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right),\vec{a}_1=\left(0,\frac{5}{7}\right)$---3 分

（Ⅱ）$\forall m,n\in(-1,1)$，$\frac{m+n}{1+mn}-1=\frac{(1-m)(n-1)}{1+mn}<0;$ -----1 分

$\frac{m+n}{1+mn}+1=\frac{(1+m)(n+1)}{1+mn}>0$ ----1 分

所以 $\frac{m+n}{1+mn}\in(-1,1)$，即每次变换后新向量都是可聚向量

又由于每次变换中都是删除两个坐标，增加一个坐标，所以对优向量 $\vec{a}$ 每操作一次，维数就少一个，所以对 $n(n\geq 2)$ 维向量 $\vec{a}$ 可进行 $n-1$ 次变换，得到一个实数-----1 分

（Ⅲ）由（Ⅱ）可知 $\vec{a}$ 总可以进行 9 次变换

对于满足 $\forall m,n\in(-1,1)$，定义运算 $m\sim n=\frac{m+n}{1+mn}$，下面证明运算满足交换律和结合律

$\because m\sim n=\frac{m+n}{1+mn}, n\sim m=\frac{n+m}{1+nm}\therefore m\sim n=n\sim m$，所以满足交换律-----1 分

$$m\sim(n\sim t)=m\sim\frac{n+t}{1+nt}=\frac{m+\frac{n+t}{1+nt}}{1+m\bullet\frac{n+t}{1+nt}}=\frac{n+t+m+mnt}{1+nt+mn+mt}$$

$$(m\sim n)\sim t=\frac{m+n}{1+mn}\sim t=\frac{\frac{m+n}{1+mn}+t}{1+\frac{m+n}{1+mn}\bullet t}=\frac{m+n+t+mnt}{1+mn+mt+nt}$$

所以 $m\sim(n\sim t)=(m\sim n)\sim t$，所以运算满足结合律-----2 分

$\vec{a}$ 聚数的结果与变换顺序无关

选择如下变换过程:

$\frac{1}{2}\sim\frac{1}{3}=\frac{5}{7}$;　$-\frac{5}{7}\sim\frac{5}{7}=0$;　$-\frac{1}{4}\sim-\frac{1}{4}=0$;　$-\frac{1}{5}\sim-\frac{1}{5}=0$;　$-\frac{1}{6}\sim-\frac{1}{6}=0$;

所以 $\overrightarrow{a_5}=\left(\frac{5}{6},0,0,0,0\right)$，$\overrightarrow{a_5}$ 经过 4 次变换得到实数 $\frac{5}{6}$

综上可知: $\vec{a}$ 聚数 $\frac{5}{6}$ ------1 分