高一数学思维训练六

A组

1．设 $z=a+bi$，其中 $a,b\in\mathrm{R}$，若 $\mathrm{i}\left(a+\mathrm{i}\right)=b-2\mathrm{i}$，则 $\overline{z}=$（　）

A．$-1-2\mathrm{i}$　　B．$-1+2\mathrm{i}$　　C．$-2-\mathrm{i}$　　D．$-2+\mathrm{i}$

2．已知复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})z=|2+\mathrm{i}|$，则 z 在复平面内对应的点位于（　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3． 在复数范围内，下列命题是真命题的为（　）

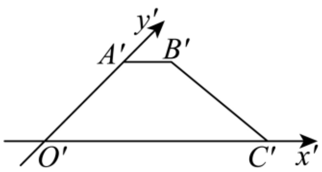
A．若 $z\neq 0$，则 $z-\overline{z}$ 是纯虚数 B．若 $z^2=-\left|z\right|^2$，则 z 是纯虚数

C．若 $z_1^2+z_2^2=0$，则 $z_1=0$ 且 $z_2=0$ D．若 z_1、z_2 为虚数，则 $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2\in\mathbf{R}$

4．已知复数 $z=2-3\mathrm{i}$，若 $z\cdot\left(a+\mathrm{i}\right)$ 是纯虚数，则实数 $a=$（　）

A．$-\dfrac{2}{3}$　　B．$\dfrac{2}{3}$　　C．$-\dfrac{3}{2}$　　D．$\dfrac{3}{2}$

5．已知梯形 $ABCO$ 按斜二测画法得到的直观图为如图所示的梯形 $A'B'C'O'$，且 $A'B'=1$，$O'A'=2$，$O'C'=4$，现将梯形 $ABCO$ 绕 OA 旋转一周得到一个几何体，则该几何体的侧面积为（　）



A．15π　　B．18π　　C．25π　　D．28π

6．攒尖是我国古代建筑中屋顶的一种结构样式，多见于亭阁式建筑、园林建筑等，如图所示的亭子带有攒尖的建筑屋顶可近似看作一个圆锥，其底面积为 16π，屋顶的体积为 $\dfrac{32\sqrt{5}}{3}\pi$，算得侧面展开图的圆心角约为（　）

A．$\dfrac{2\pi}{3}$　　B．$\dfrac{5\pi}{6}$　　C．$\dfrac{4\pi}{3}$　　D．$\dfrac{7\pi}{6}$

7．已知一个正六棱台的两底面边长分别为 $2\mathrm{m},4\mathrm{m}$，高是 $2\mathrm{m}$，则该棱台的斜高为（　）

A．$2\mathrm{m}$　　B．$2\sqrt{2}\mathrm{m}$　　C．$\sqrt{7}\mathrm{m}$　　D．$4\mathrm{m}$

8．两平行平面截半径为 5 的球，若截面面积分别为 9π 和 16π，则这两个平面间的距离是（　　）

A．1　　　B．7　　C．3 或 4　　　　D．1 或 7

9. 已知圆锥的侧面积是4π，且它的侧面展开图是一个半圆，则这个圆锥的内切球半径为(　　)

A．$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$　　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　　C．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　　D．$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

10．已知四面体$ABCD$的所有棱长均为 1，M，N 分别为棱AD，BC的中点，F为棱AB上异于A，B的动点．有下列结论：

①线段MN的长度为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；　②$\triangle FMN$周长的最小值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1$；

③四面体$ABCD$的外接球的体积$\dfrac{\sqrt{6}}{8}\pi$；　④四面体$ABCD$的内切球的半径$\dfrac{\sqrt{6}}{12}$.

其中正确结论的个数为（　）.

A．1　　　B．2　　　C．3　　　D．4

B 组

11．已知函数$f\left(x\right)=\cos x\left(\sqrt{3}\sin x+3\cos x\right)-a$的图像经过点$\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{3}{2}\right)$.

(1)求实数a的值，并求$f\left(x\right)$的单调递减区间；

(2)当$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$时，$f\left(x\right)\geq m$恒成立，求实数$m$的取值范围.

12．已知函数$f\left(x\right)=\cos^2\omega x+\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+m(\omega>0,m\in \mathrm{R})$，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择能确定函数$f\left(x\right)$的解析式的两个作为已知．条件①：函数$f\left(x\right)$的最小正周期为π；条件②：函数$f\left(x\right)$的图象经过点$\left(0,\frac{1}{2}\right)$；条件③：函数$f\left(x\right)$的最大值为$\frac{3}{2}$．

(1)求函数$f\left(x\right)$的解析式；

(2)若函数$f\left(x\right)$在区间$\left[0,t\right](t>0)$上有且仅有1个零点，求t的取值范围．

注：如果选择的条件不符合要求，得0分；如果选择多组符合要求得条件分别解答，按第一组解答计分．

13．在条件①对任意的$x\in \mathbf{R}$，都有$f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=f\left(x\right)$；条件②$f\left(x\right)$最小正周期为$\pi$；条件③$f\left(x\right)$在$\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$上为增函数，这三个条件中选择两个，补充在下面的题目中，并解答．

已知$f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\varphi\right),\left(\omega>0,0\le\varphi<2\pi\right)$，若______，则$\omega,\varphi$唯一确定．

(1)求$f\left(x\right)$的解析式；

(2)设函数$g\left(x\right)=2f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1$，对任意的$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{12}\right]$，不等式$g^2\left(x\right)-mg\left(x\right)-1\leqslant 0$恒成立，求实数$m$的取值范围．

14．对 $n\in\mathbf{N}^*$，定义 $a_n(x)=\frac{1}{n}\left(\sin^2 x-\cos nx\right)$．

（1）求 $a_2(x)-a_1(x)$ 的最小值；

（2）$\forall n\in\mathbf{N}^*$，有 $a_n(x)\geqslant A$ 恒成立，求 A 的最大值；

（3）求证：不存在 $m,n\in\mathbf{N}^*$，且 $m>n$，使得 $a_m(x)-a_n(x)$ 为恒定常数．

15．定义：若函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 D，且存在非零常数 T，对任意 $x\in D$，$f\left(x+T\right)=f\left(x\right)+T$ 恒成立，则称 $f\left(x\right)$ 为线周期函数，T 为 $f\left(x\right)$ 的线周期.

（1）下列函数 $1.y=2^x$，$2.y=\log_2 x$，$3.y=\left[x\right]$（其中 $\left[x\right]$ 表示不超过 x 的最大整数），是线周期函数的是____________（直接填写序号）；

（2）若 $g(x)$ 为线周期函数，其线周期为 T，求证：$G\left(x\right)=g(x)-x$ 为周期函数；

（3）若 $\phi\left(x\right)=\sin x+kx$ 为线周期函数，求 k 的值.

参考答案：

1．D

【分析】利用复数相等求参数，再根据共轭复数的的形式，即可求解.

【详解】因为$\mathrm{i}\left(a+\mathrm{i}\right)=b-2\mathrm{i}$，所以$-1+a\mathrm{i}=b-2\mathrm{i}$，所以$a=-2,b=-1$，

所以$z=-2-\mathrm{i}$，故$\bar{z}=-2+\mathrm{i}$.

故选：D

2．A

【分析】利用复数的模长公式及除法运算法则结合几何意义计算即可.

【详解】易知$\left|2+\mathrm{i}\right|=\sqrt{5}$，所以$z=\dfrac{\sqrt{5}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{\sqrt{5}\left(1+\mathrm{i}\right)}{\left(1-\mathrm{i}\right)\left(1+\mathrm{i}\right)}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}\mathrm{i}$，

则z在复平面内对应的点为$\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2},\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$，显然位于第一象限.

故选：A

3．D

【来源】广东省汕头市2024届高三第一次模拟考试数学试题

【分析】利用特殊值法可判断ABC选项；利用共轭复数的定义结合复数的乘法、复数的概念可判断D选项.

【详解】对于A选项，取$z=1$，则$\bar{z}=1$，所以，$z-\bar{z}=0$，此时，$z-\bar{z}$不是纯虚数，A错；

对于B选项，取$z=0$，则$z^2=-\left|z\right|^2$成立，但z不是纯虚数，B错；

对于C选项，取$z_1=\mathrm{i}$，$z_2=1$，则$z_1^2+z_2^2=0$，但$z_1\neq 0$且$z_2\neq 0$，C错；

对于D选项，若z_1、z_2为虚数，设$z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}\left(a,b,c,d\in\mathbf{R}\right)$，

则$\overline{z_1}=a-b\mathrm{i}$，$\overline{z_2}=c-d\mathrm{i}$，

所以，

$z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=\left(a+b\mathrm{i}\right)\left(c-d\mathrm{i}\right)+\left(a-b\mathrm{i}\right)\left(c+d\mathrm{i}\right)=\left(ac+bd\right)+\left(bc-ad\right)\mathrm{i}+\left(ac+bd\right)+\left(ad-bc\right)\mathrm{i}$

$=2\left(ac+bd\right)\in\mathbf{R}$，D对.

故选：D.

4．C

【来源】天津市西青区杨柳青第一中学2021-2022学年高一下学期4月复课摸底阶段反馈数

学试题

【分析】化简$z\cdot(a+\mathrm{i})=2a+3+(-3a+2)\mathrm{i}$，解方程组$\begin{cases}2a+3=0\\-3a+2\neq 0\end{cases}$即得解.

【详解】解：$z\cdot(a+\mathrm{i})=(2-3\mathrm{i})(a+\mathrm{i})=2a+3+(-3a+2)\mathrm{i}$是纯虚数，

则$\begin{cases}2a+3=0\\-3a+2\neq 0\end{cases}$，解得$a=-\dfrac{3}{2}$.

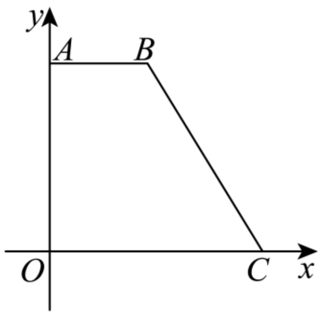
故选：C.

5．C

【分析】将梯形$A'B'C'O'$复原为原图即直角梯形$ABCO$，确定相关的边长，结合题意以及圆台的侧面积公式，即可求得答案.

【详解】由题意将梯形$A'B'C'O'$复原为原图，即直角梯形$ABCO$，

其中$AB=1,OA=4,OC=4$，则$BC=\sqrt{(4-1)^2+4^2}=5$，



故将梯形$ABCO$绕OA旋转一周得到一个几何体为圆台，

圆台上底面半径为1，下底面半径为4，高为4，母线长为5，

故该几何体的侧面积为$\pi(1+4)\times 5=25\pi$，

故选：C

6．C

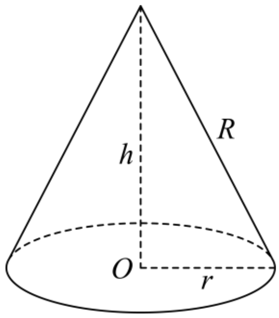
【分析】

根据底面圆面积求出底面圆半径，从而求出底面圆周长，得侧面展开图扇形的弧长，再由圆锥体积求圆锥的高，勾股定理求圆锥母线长，得侧面展开图扇形半径，可求侧面展开图的圆心角.

【详解】底面圆的面积为16π，得底面圆的半径为$r=4$，

所以底面圆周长为8π，即圆锥侧面展开图扇形的弧长为$l=8\pi$，

屋顶的体积为$\frac{32\sqrt{5}}{3}\pi$，由$\frac{1}{3}\times 16\pi h=\frac{32\sqrt{5}}{3}\pi$得圆锥的高$h=2\sqrt{5}$，



所以圆锥母线长，即侧面展开图扇形半径$R=\sqrt{h^2+r^2}=\sqrt{20+16}=6$，

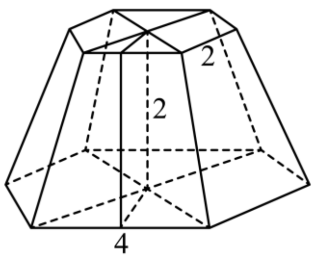
得侧面展开图扇形的圆心角约为$\alpha=\frac{l}{R}=\frac{8\pi}{6}=\frac{4\pi}{3}$.

故选：C.

7．C

【分析】由正棱台的性质确定侧面为等腰梯形，结合已知条件求斜高即可.

【详解】由题意，正棱台侧面为上下底边长分别为2m,4m的等腰梯形，



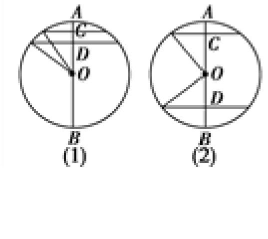
所以棱台的斜高为$\sqrt{2^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$.

故选：C

8．D

【详解】如图(1)所示，若两个平行平面在球心同侧，则 $CD=\sqrt{5^2-3^2}-\sqrt{5^2-4^2}=1$.

如图(2)所示，若两个平行截面在球心两侧，则 $CD=\sqrt{5^2-3^2}+\sqrt{5^2-4^2}=7$.选 D.

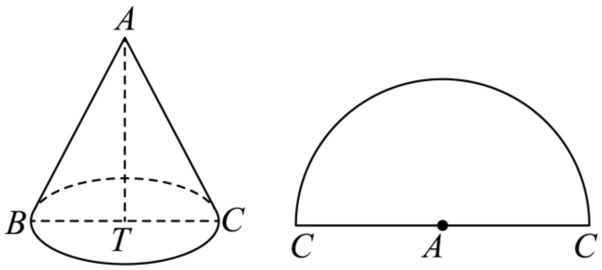


9．D

【分析】设出圆锥底面圆的半径，并由题意联立方程组求出；再由勾股定理解出圆锥内切球

的半径即可.

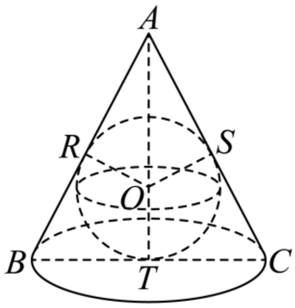
【详解】



设圆锥底面圆的半径为r，高为h，母线长为l，由题意知：$\begin{cases}\pi rl=4\pi\\ \pi l=2\pi r\end{cases}$，

两式相除解得$r=\sqrt{2}$，$l=2\sqrt{2}$；

所以圆锥的顶角为$\frac{\pi}{3}$，轴截面为等边三角形，圆锥的高$h=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{6}$，



设圆锥的内切圆半径为R，$\left(\sqrt{6}-R\right)^2=R^2+\left(\sqrt{2}\right)^2$，解得$R=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

故选：D.

10．D

【分析】①连接AN，DN，易知$\triangle AND$为等腰三角形，即$MN\perp AD$，即可求MN的长；

②将面ABD、面ABC展开为一个平面，判断$NF+FN$最小的情况即可.

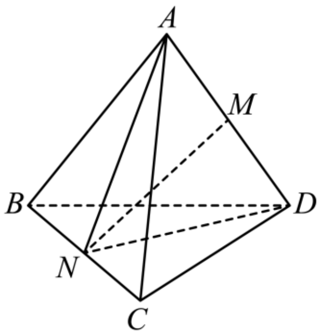
③将正四面体放入正方体中，利用正方体求解外接球半径，再由体积公式即可求解；

④根据线面垂直，即可得线面角的几何角，由三角形边角关系即可求解.

【详解】连接AN，DN四面体$ABCD$的所有棱长均为1，则$AN=DN=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

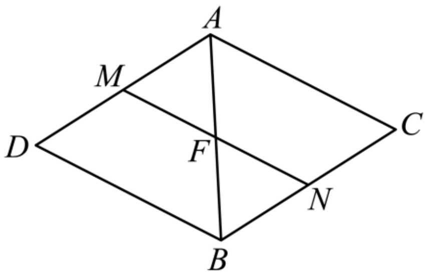
则$\triangle AND$为等腰三角形，所以$MN\perp AD$，

所以$MN=\sqrt{AN^2-\left(\frac{AD}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故①正确，



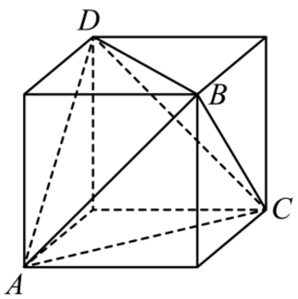
$\triangle MFN$周长的最小，只需$MF+FN$最小，将面ABD、面ABC展开为一个平面，如图：

当M，F，N共线时，$MF+FN$最小为$MN=1$，故$\triangle MFN$周长的最小值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1$，②正确.



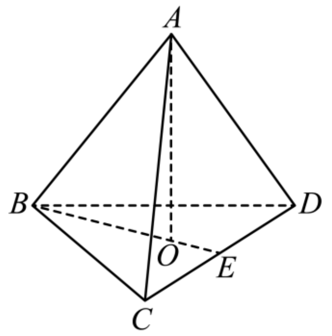
由于四面体$ABCD$为正四面体，不妨将其放入正方体中，则正方体的外接球即为四面体的外接球，

由于四面体$ABCD$的所有棱长均为1，所以正方体的棱长$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故正方体的体对角线长度为$\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，因此外接球的半径$R=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，所以体积为$\dfrac{4\pi}{3}\times\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)^3=\dfrac{\sqrt{6}}{8}\pi$，③正确；



过A作$AO\perp$平面BCD于O，则O为底面三角形的中心，故$\angle ABO$即为棱AB与面BCD所成的角，由于$OB=\dfrac{2}{3}BE=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,$\therefore AO=\sqrt{AB^2-OB^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,

所以$\sin\angle ABO=\dfrac{AO}{AB}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,故④正确,



故选：D

11．(1) $a=\frac{3}{2}$，$\left[\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{7\pi}{12}+k\pi\right](k\in Z)$

(2) $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]$

【分析】（1）直接利用三角函数关系式的恒等变换和正弦型函数性质的应用求出函数的单调区间；

（2）利用函数的定义域求出函数的值域，进一步利用恒成立问题求出参数 m 的取值范围．

【详解】（1）由题意得，$\cos\frac{\pi}{6}\left(\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6}+3\cos\frac{\pi}{6}\right)-a=\frac{3}{2}$.

解得 $a=\frac{3}{2}$.

所以 $f\left(x\right)=\cos x\left(\sqrt{3}\sin x+3\cos x\right)-\frac{3}{2}=\sqrt{3}\sin x\cos x+3\cos^2 x-\frac{3}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+3\times\frac{1+\cos 2x}{2}-\frac{3}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{3\cos 2x}{2}=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$,

由 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，得 $\frac{\pi}{12}+k\pi\le x\le\frac{7\pi}{12}+k\pi,k\in Z$，

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{7\pi}{12}+k\pi\right](k\in Z)$.

（2）由（1）可知 $f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

因为 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{3}\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{4\pi}{3}$.

所以 $-\frac{3}{2}\le\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\le\sqrt{3}$.

所以 $-\frac{3}{2}\le f\left(x\right)\le\sqrt{3}$.

当 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$，即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $-\frac{3}{2}$.

因为$f(x)\geq m$恒成立等价于$m\leq f\left(x\right)_{\min}$，所以$m\leq -\dfrac{3}{2}$.

所以实数m的取值范围是$\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right]$.

12．(1)答案见解析

(2)答案见解析

【分析】（1）根据三角恒等变换可化简函数$f\left(x\right)$，根据正弦型函数的周期性、对称性、最值即可得求得参数ω，即可得函数$f\left(x\right)$的解析式；

（2）根据正弦型三角函数的零点，利用整体代换法列不等式即可得t的取值范围.

【详解】（1）由题可知，$f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x+\dfrac{1}{2}\cos 2\omega x+m+\dfrac{1}{2}=\sin\left(2\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)+m+\dfrac{1}{2}$，

选择①②：(1)因为$T=\dfrac{2\pi}{2\omega}=\pi$，

所以$\omega=1$，

又因为$f\left(0\right)=1+m=\dfrac{1}{2}$，

所以$m=-\dfrac{1}{2}$，$f\left(x\right)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$；

若选①③：因为$T=\dfrac{2\pi}{2\omega}=\pi$，

所以$\omega=1$，

因为$f\left(x\right)$的最大值为$m+\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$，即$m=0$，

所以$f\left(x\right)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}$；

若选②③：因为$f\left(0\right)=1+m=\dfrac{1}{2}$，

所以$m=-\dfrac{1}{2}$，

因为$f\left(x\right)$的最大值为$m+\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$，即$m=0$，

此时m不存在；

（2）若选①②，令$\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=0$，则$2x+\dfrac{\pi}{6}=k\pi,k\in Z$，

所以$x=\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{12}$，$k\in Z$，

当$k=1$，$k=2$时，函数$f\left(x\right)$的零点为$\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}$，

因为函数$f\left(x\right)$在区间$\left[0,t\right]$上有且仅有1个零点，

所以$\frac{5\pi}{12}\le t<\frac{11\pi}{12}$，

所以t的取值范围是$\left[\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right)$；

选择①③：$f\left(x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$，

令$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}=0$，则$2x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{7}{6}\pi$，$k\in Z$，或$2x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{11}{6}\pi$，$k\in Z$，

所以$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，或$x=k\pi+\frac{5}{6}\pi$，$k\in Z$，

当$k=0$时，函数$f\left(x\right)$的零点分别为$\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}$，

因为函数$f\left(x\right)$在区间$\left[0,t\right]$上有且仅有1个零点，

所以$\{t\,|\,\frac{\pi}{2}\le t<\frac{5\pi}{6}\}$.

13．(1) $f\left(x\right)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$

(2) $[\frac{8}{3},+\infty)$

【分析】（1）解：若选择①②、②③和①③，结合三角函数的图象与性质，求得ω,φ的值，即可求得函数$f\left(x\right)$的解析式；

（2）由$g\left(x\right)=2\sin(2x+\frac{2\pi}{3})+1$，再由$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{12}\right]$，求得$g\left(x\right)\in[2,3]$，根据题意，转化为$m\ge\frac{g^2\left(x\right)-1}{g\left(x\right)}$恒成立，令$t=g\left(x\right)\in[2,3]$，结合$h\left(t\right)=t-\frac{1}{t}$为单调递增函数，求得$h\left(t\right)_{\max}$，即可求解.

【详解】（1）解：若选择①②：

由函数$f\left(x\right)$最小正周期为π，可得$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，可得$\omega=2$，即$f\left(x\right)=\sin\left(2x+\varphi\right)$，

又由对任意的$x\in\mathbf{R}$，都有$f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=f\left(x\right)$，可得$f\left(x\right)$关于$x=\frac{\pi}{12}$对称，

即$2\times\frac{\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，即$\varphi=\frac{\pi}{\mathbf{3}}+\mathbf{2}k\pi,k\in Z$，

因为$0\le\varphi<2\pi$，可得$\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以$f\left(x\right)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$；

若选择②③：

由函数$f\left(x\right)$最小正周期为π，可得$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，可得$\omega=2$，即$f\left(x\right)=\sin\left(2x+\varphi\right)$，

又由$x\in\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$，可得$2x+\varphi\in\left[-\frac{5\pi}{6}+\varphi,\frac{\pi}{6}+\varphi\right]$，

因为函数$f\left(x\right)$在$\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$为单调递增函数，则满足$\begin{cases}-\frac{5\pi}{6}+\varphi\ge-\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{6}+\varphi\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$，解得$\begin{cases}\varphi\ge\frac{\pi}{3}\\ \varphi\le\frac{\pi}{3}\end{cases}$，

所以$\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以$f\left(x\right)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$；

若选择①③：

由对任意的$x\in\mathbf{R}$，都有$f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=f\left(x\right)$，可得$f\left(x\right)$关于$x=\frac{\pi}{12}$对称，

即$\omega\times\frac{\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，即$\varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{\omega\pi}{12}+2k\pi,k\in Z$，

又由函数$f\left(x\right)$在$\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$为单调递增函数，可得$\frac{\pi}{\omega}\ge\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}$，解得$0<\omega\le2$，

又由$x\in\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$，可得$\omega x+\varphi\in\left[-\frac{5\omega\pi}{12}+\varphi,\frac{\omega\pi}{12}+\varphi\right]$，

因为函数$f\left(x\right)$在$\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$为增函数，则满足$\begin{cases}-\frac{5\omega\pi}{12}+\varphi\ge-\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ \frac{\omega\pi}{12}+\varphi\le\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases},k\in Z$，

解得$\begin{cases}\varphi\ge\frac{5\omega\pi}{12}-\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ \varphi\le\frac{\pi}{2}-\frac{\omega\pi}{12}+2k\pi\end{cases},k\in Z$，所以$\frac{5\omega\pi}{12}-\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{2}-\frac{\omega\pi}{12}\le\frac{\pi}{2}-\frac{\omega\pi}{12}$，即$\frac{\omega\pi}{2}\le\pi$，

因为$0<\omega\le2$，所以$\omega=2$，此时$\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以$f\left(x\right)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$.

（2）解：由$g\left(x\right)=2f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1=2\sin(2x+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3})+1=2\sin(2x+\frac{2\pi}{3})+1$，

因为$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{12}\right]$，可得$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$，所以$\sin(2x+\frac{\pi}{3})\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，即$g\left(x\right)\in[2,3]$，

又由对任意的$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{12}\right]$，不等式$g^2\left(x\right)-mg\left(x\right)-1\leqslant0$恒成立，

即不等式$mg\left(x\right)\ge g^2\left(x\right)-1$恒成立，即$m\ge\frac{g^2\left(x\right)-1}{g\left(x\right)}$恒成立，

令$t=g\left(x\right)\in[2,3]$，即$m\ge\frac{t^2-1}{t}=t-\frac{1}{t}$恒成立，

令$h\left(t\right)=t-\frac{1}{t}$在$t\in[2,3]$上为单调递增函数，则$h\left(t\right)_{\max}=h(3)=\frac{8}{3}$，所以$m\geq\frac{8}{3}$，

即实数m的取值范围为$[\frac{8}{3},+\infty)$.

14．（1）$-\frac{3}{2}$；（2）-1；（3）见解析.

【分析】（1）依题意可得$a_2(x)-a_1(x)=-\frac{1}{2}(\cos x-1)^2+\frac{1}{2}$，进而可得结果；

（2）依题意可得对$\forall n\in\mathrm{N}^*$，$a_n(x)\geq-1$，所以$A\leq-1$，故可得结果；

（3）用反证法证明，假设存在$m,n\in\mathrm{N}^*$，且$m>n$，使得$g(x)=a_m(x)-a_n(x)$恒为常数，由$g(0)$，$g(\pi)$，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)$结合奇偶分析得出矛盾.

【详解】（1）依题意得

$a_2(x)-a_1(x)=\frac{1}{2}(\sin^2 x-\cos 2x)-(\sin^2 x-\cos x)=-\frac{1}{2}\cos^2 x+\cos x=-\frac{1}{2}(\cos x-1)^2+\frac{1}{2}$,

所以当$\cos x=-1$时，$a_2(x)-a_1(x)$有最小值$-\frac{3}{2}$；

（2）因为对$\forall n\in\mathrm{N}^*$，$a_n(x)=\frac{1}{n}\sin^2 x-\frac{1}{n}\cos nx\geq-\frac{1}{n}\geq-1$，所以$A\leq-1$，即A的最大值为$-1$；

（3）用反证法：假设存在$m,n\in\mathrm{N}^*$，且$m>n$，使得$g(x)=a_m(x)-a_n(x)$恒为常数，

$g(x)=a_m(x)-a_n(x)=\frac{1}{m}\left(\sin^2 x-\cos mx\right)-\frac{1}{n}\left(\sin^2 x-\cos nx\right)$，

则$g(0)=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}>0$，$g(\pi)=\frac{1}{n}\cos n\pi-\frac{1}{m}\cos m\pi$，

由$g(0)=g(\pi)$可得$\cos n\pi=\cos m\pi=1$，即m,n是偶数.

而$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{m}-\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{m}\cos\frac{m\pi}{2}\right)>0$，由于$\frac{1}{m}-\frac{1}{n}<0$，所以必有$\cos\frac{n\pi}{2}=1$.

若$\cos\frac{m\pi}{2}=1$，则$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，不合题意；

若$\cos\frac{m\pi}{2}=-1$，则$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{m}=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}$，故$m=3n$.

而由$\cos\frac{n\pi}{2}=1$，$\cos\frac{m\pi}{2}=-1$可知：$\frac{n}{2}$是偶数，$\frac{m}{2}$是奇数，

由$m=3n$可得$\frac{m}{2}=3\times\frac{n}{2}$，显然矛盾.

综上，不存在符合题意的m，n.

【点睛】关键点点睛：第（3）问用反证法证明的关键点是：由$g(0)$，$g(\pi)$，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)$结合奇偶分析得出矛盾.

15．（1）3；（2）证明见解析；（3）$k=1$．

【分析】（1）根据新定义逐一判断即可；

（2）根据新定义证明即可；

（3）若$\phi(x)=\sin x+kx$为线周期函数，则存在非零常数T，对任意$x\in R$，都有

$\sin(x+T)+k(x+T)=\sin x+kx+T$，可得$2kT=2T$，解得$k$的值再检验即可.

【详解】（1）对于$y=2^x$，$f(x+T)=2^{x+T}=2^x\cdot 2^T=f(x)\cdot 2^T$，所以不是线周期函数，

对于$y=\log_2 x$，$f(x+T)=\log_2(x+T)\neq f(x)+T$，所以不是线周期函数，

对于$y=[x]$，$f(x+1)=[x+1]=[x]+1=f(x)+1$，所以是线周期函数；

（2）若$g(x)$为线周期函数，其线周期为T，

则存在非零常数T对任意$x\in R$，都有$g(x+T)=g(x)+T$恒成立，

因为$G(x)=g(x)-x$，

所以$G(x+T)=g(x+T)-(x+T)=g(x)+T-(x+T)=g(x)-x=G(x)$，

所以$G(x)=g(x)-x$为周期函数；

（3）因为$\phi(x)=\sin x+kx$为线周期函数，

则存在非零常数T，对任意$x\in R$，

都有$\sin(x+T)+k(x+T)=\sin x+kx+T$，

所以$\sin(x+T)+kT=\sin x+T$，

令$x=0$，得$\sin T+kT=T$，

令$x=\pi$，得$-\sin T+kT=T$，

所以$2kT=2T$，因为$T\neq 0$，所以$k=1$，

检验：当$k=1$时，$\phi(x)=\sin x+x$，

存在非零常数2π，对任意$x\in R$，

$\phi(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)+(x+2\pi)=\sin x+x+2\pi=\phi(x)+2\pi$，

所以$\phi(x)=\sin x+x$为线周期函数，

所以：$k=1$.

【点睛】关键点点睛：本题解题的关键点是对新定义的理解和应用，以及特殊值解决恒成立问题.