周六数学思维训练第四讲

A 组

1．在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a，b，c，若$a=2$，$A=\frac{\pi}{6}$，$\cos B=\frac{\sqrt{15}}{4}$，则$b=$_______

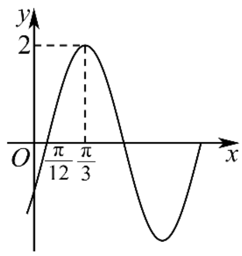
2．在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，若$a=\sqrt{3},b=1,B=\frac{\pi}{6}$，则$c=$（　）

3．在$\triangle ABC$中，$c\cos B=\left(2a-b\right)\cos C$，则角$C=$（　）

4．已知a,b,c分别为$\triangle ABC$内角A,B,C的对边，$\triangle ABC$的面积$S=\frac{a^2+b^2-c^2}{4}$，则$C=$（　）

5．函数$f(x)=-\cos 2x-3\cos x$的最小值为（　　）

6．函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象如图所示，其中$A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，则下列关于函数$f\left(x\right)$的说法中正确的是（　　）



（1）．在$\left(-\pi,-\frac{5\pi}{6}\right)$上单调递减（2）．$\varphi=-\frac{\pi}{6}$

（3）．最小正周期是π（4）．对称轴是直线$x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}(k\in Z)$

7．将函数$f(x)=\cos^2 x-\sqrt{3}\sin x\cos x-1$的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，再向上平移 1 个单位长度，得到函数$g(x)$的图象，则下列关于$g(x)$的说法正确的是（　　）

（1）．最大值为 1（2）．图象关于y轴对称（3）．图象关于点$\left(\frac{\pi}{4},0\right)$成中心对称

（4）．图象关于直线$x=\frac{\pi}{3}$对称

8．已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，若$|\vec{a}|=3$，$\left|\vec{b}\right|=2$，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，则$\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|=$（　　）

9．已知向量$\vec{a}=\left(-1,-1\right)$，$\vec{b}=\left(-1,1\right)$，若$\left(\lambda\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\left(\mu\vec{a}+\vec{b}\right)$，则（　）

A．$\lambda\mu=-1$　　B．$\lambda+\mu=-1$　　C．$\lambda\mu=1$　　D．$\lambda+\mu=1$

10．已知$|\vec{a}|=1$，$\left|\vec{b}\right|=2$，且$\vec{a}\perp\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$则$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影数量为（　）

B 组：

11．函数$f\left(x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)$在区间$\left[t-\frac{\pi}{4},t\right]$$\left(t\in \mathrm{R}\right)$上的最大值与最小值之差的取值范围为_____.

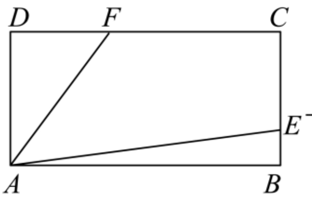
12．已知集合$M=\{\left(x,y\right)|\,y=f\left(x\right)\}$，若对于任意$\left(x_1,y_1\right)\in M$，存在$\left(x_2,y_2\right)\in M$，使得

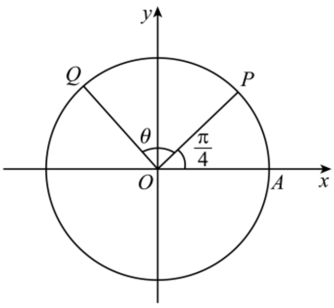
$x_1x_2+y_1y_2=0$成立，则称集合M是“垂直对点集”.给出下列四个集合：

□$M=\{(x,y)\mid y=\sin x+1\}$　□$M=\{(x,y)\mid y=\frac{1}{x}\}$

□$M=\{(x,y)\mid y=e^x-2\}$　□$M=\{(x,y)\mid y=\log_2 x\}$其中是“垂直对点集”的序号是______.

13. 如图，在矩形$ABCD$中，$AB=4,BC=2$，点E,F分别在线段BC,CD上，且$\angle EAF=\frac{\pi}{4}$，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$的最小值为________.





14．已知函数$f(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{6})$，若对于任意的$x_1\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$，总存在$x_2\in[m,n]$，使得$f(x_1)+f(x_2)=0$，则$|m-n|$的最小值为__.

15．如图，在平面直角坐标系xOy中，点A为单位圆与x轴正半轴的交点，点P为单位圆上的一点，且$\angle AOP=\frac{\pi}{4}$，点P沿单位圆按逆时针方向旋转角θ后到点$Q(a,b)$

（1）当$\theta=\frac{\pi}{6}$时，求ab的值；（2）设$\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，求$b-a$的取值范围.

16．已知函数$f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$.

(1)求函数$f(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值和最小值；

(2)若$f(x_0)=\frac{8}{5},x_0\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，求$\cos 2x_0$的值；

(3)若函数$y=f(\omega x)$在区间$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$上是单调递增函数，求正数$\omega$的取值范围.

参考答案：

1．B

【分析】首先求出$\sin B$，再由正弦定理计算可得.

【详解】因为$\cos B=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$， $B\in(0,\pi)$，所以$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{1}{4}$，

由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，即$\dfrac{2}{\sin\frac{\pi}{6}}=\dfrac{b}{\frac{1}{4}}$，解得$b=1$.

故选：B

2．C

【分析】由余弦定理即可求.

【详解】由余弦定理得$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

化简得$c^2-3c+2=0$，解出$c=1$或 2.

故选：C.

3．B

【分析】结合正弦定理边化角、两角和的公式逆用以及诱导公式化简得$\sin A=2\sin A\cos C$，

进一步有$\cos C=\dfrac{1}{2}$，由此即可得解.

【详解】由$c\cos B=(2a-b)\cos C$结合正弦定理有$\sin C\cos B=(2\sin A-\sin B)\cos C$，

即$\sin C\cos B+\sin B\cos C=\sin(B+C)=\sin A=2\sin A\cos C$，

因为$A\in(0,\pi),\sin A\neq 0$，解得$\cos C=\dfrac{1}{2}$，而$C\in(0,\pi)$，所以角$C=\dfrac{\pi}{3}$.

故选：B.

4．C

【分析】根据余弦定理和三角形面积公式得到方程，求出$\tan C=1$，得到答案.

【详解】由余弦定理得$a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$，

又三角形面积公式得$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$，

故$\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{2ab\cos C}{4}$，

又$a>0,b>0$，故$\dfrac{\sin C}{\cos C}=1$，即$\tan C=1$，

又$C\in(0,\pi)$，故$C=45^\circ$.

故选：C

5．D

【分析】倍角公式运用于研究函数最值，根据函数解析式的特征利用倍角公式

$\cos 2x=2\cos^2 x-1$进行转化解析式，再利用一元二次函数和三角函数值的有界性可求出结果.

【详解】由题 $f\left(x\right)=-\cos 2x-3\cos x=-2\cos^2 x-3\cos x+1=-2\left(\cos x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{17}{8}$，

因为$\cos x\in\left[-1,1\right]$，所以$-2\left(\cos x+\frac{3}{4}\right)^2\in\left[-\frac{49}{8},0\right]$，所以 $f\left(x\right)\in\left[-4,\frac{17}{8}\right]$，

所以函数的最小值为-4.

故选：D.

6．A

【分析】由图象和参数的取值范围，可求函数解析式，再确定函数的性质即可判断.

【详解】由图象易知：$A=2$；

$\frac{T}{4}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}\Rightarrow \omega=2$；

由 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\Rightarrow 2\sin\left(2\times\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=2\Rightarrow 2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in \mathrm{Z}$

又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=-\frac{\pi}{6}$.故 BC 内容正确；

因为 $f\left(x\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，

$f\left(-\pi\right)=2\sin\left(-2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-1$， $f\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=2\sin\left(-\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)=1$，

$f\left(-\pi\right)<f\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$，所以函数在$\left(-\pi,-\frac{5\pi}{6}\right)$不是减函数，故 A 错；

由 $2x-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$， $k\in \mathrm{Z}$即为函数的对称轴，故 D 对.

故选：A

7．B

【分析】先由二倍角和辅助角公式化简，再结合余弦函数的性质逐一判断即可.

【详解】由题意得，$f(x)=\frac{1+\cos 2x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-1=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$，

则 $g(x)=-\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}+1=-\cos 2x+\frac{1}{2}$，

□ $g(x)$为偶函数，关于 y 轴对称，故 B 正确；

最大值为$\frac{3}{2}$，故 A 错误；

由$2x=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$，所以$x=\frac{k}{2}\pi+\frac{\pi}{4}$，关于$\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$故 C 错误；

因为$2x=k\pi,k\in Z\Rightarrow x=\frac{k}{2}\pi$，故 D 错误；

故选：B.

8．A

【分析】由数量积公式结合$\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|=\sqrt{\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)^2}$得出答案.

【详解】□向量$\left|\vec{a}\right|=3$，$\left|\vec{b}\right|=2$，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，

□$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times2\times\cos\frac{\pi}{3}=3$，

□$\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|=\sqrt{\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)^2}=\sqrt{4\vec{a}^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9\vec{b}^2}=\sqrt{4\times9-12\times3+9\times4}=6$.

故选：A.

9．A

【分析】首先表示$\lambda\vec{a}+\vec{b}$，$\mu\vec{a}+\vec{b}$的坐标，依题意$\left(\lambda\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\mu\vec{a}+\vec{b}\right)=0$，根据数量积的坐标表示计算可得.

【详解】因为$\vec{a}=(-1,-1)$，$\vec{b}=(-1,1)$，

所以$\lambda\vec{a}+\vec{b}=\lambda(-1,-1)+(-1,1)=(-\lambda-1,-\lambda+1)$，

$\mu\vec{a}+\vec{b}=\mu(-1,-1)+(-1,1)=(-\mu-1,-\mu+1)$，

又$\left(\lambda\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\left(\mu\vec{a}+\vec{b}\right)$，

所以$\left(\lambda\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\mu\vec{a}+\vec{b}\right)=0$，

即$(-\lambda-1)(-\mu-1)+(-\lambda+1)(-\mu+1)=0$，

整理得$\lambda\mu=-1$.

故选：A

10．D

【分析】由$\vec{a}\perp\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$得$\vec{a}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=0$，从而求得$\vec{a}\cdot\vec{b}$，再由投影数量的定义直接计算即可.

【详解】$\because\vec{a}\perp\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$，

$\therefore \vec{a}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=0$，

$\therefore \vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，即$\left|\vec{a}\right|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=-1$，

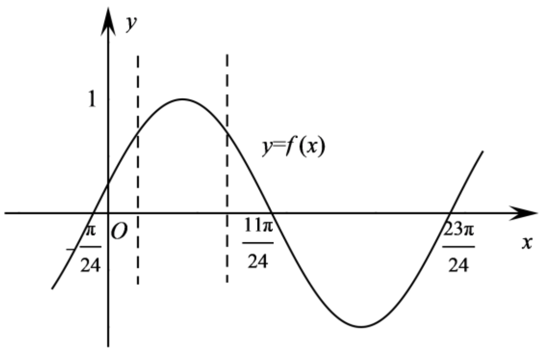
$\therefore \vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影数量为$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=-\dfrac{1}{2}$.

故选：D.

11．$\left[\dfrac{2-\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right]$

【分析】根据三角函数的性质结合函数的图象可得函数在区间$\left(t-\dfrac{\pi}{4},t\right)$内取得最值且$f\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)=f\left(t\right)$时，函数的最大值与最小值之差取得最小值，当函数$f\left(x\right)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{12}\right)$在区间$\left[t-\dfrac{\pi}{4},t\right]$内最值在端点上取时取得最大值，进而即得.

【详解】作函数$f\left(x\right)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{12}\right)$的大致图象，



区间$\left[t-\dfrac{\pi}{4},t\right]$的长度为$\dfrac{\pi}{4}$，函数$f\left(x\right)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{12}\right)$的周期为$\pi$，

当函数$f\left(x\right)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{12}\right)$在区间$\left[t-\dfrac{\pi}{4},t\right]$内取得最值，且$f\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)=f\left(t\right)$时，

函数$f\left(x\right)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{12}\right)$在区间$\left[t-\dfrac{\pi}{4},t\right]\left(t\in\mathrm{R}\right)$上的最大值与最小值之差取得最小值为

$1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$；

当函数$f\left(x\right)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{12}\right)$在区间$\left[t-\dfrac{\pi}{4},t\right]$内最值在端点上取时，

$\left|f\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)-f\left(t\right)\right|=\left|\sin\left(2t-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{12}\right)-\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{12}\right)\right|$

$=\left|-\cos\left(2t+\frac{\pi}{12}\right)-\sin\left(2t+\frac{\pi}{12}\right)\right|$

$=\left|\sqrt{2}\sin\left(2t+\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\le\sqrt{2}$，

所以函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)$ 在区间 $\left[t-\frac{\pi}{4},t\right]$ $(t\in\mathrm{R})$ 上的最大值与最小值之差的取值范围为 $\left[\frac{2-\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right]$.

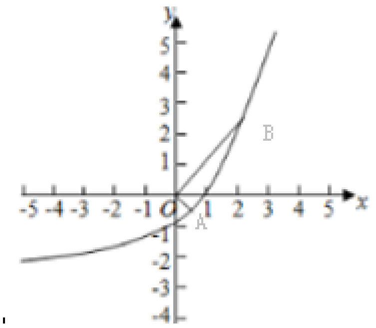
故答案为：$\left[\frac{2-\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right]$.

12．□□

【分析】变形 $x_1x_2+(sinx_1+1)(sinx_2+1)=0$ 利用值域为 $(-\infty,+\infty)$ 判断□；利用方程无解判断□；利用数形结合判断□；利用特殊点判断□.

【详解】对于□，$x_1x_2+(sinx_1+1)(sinx_2+1)=0$，即 $\frac{x_1}{sinx_1+1}=-\frac{sinx_2+1}{x_2}$，$f(x_1)=\frac{x_1}{\sin x_1+1}$ 与 $f(x_2)=-\frac{\sin x_2+1}{x_2}$ 的值域均为 $(-\infty,+\infty)$，故□正确；

对于□,若满足 $x_1x_2+y_1y_2=0$，则 $x_1x_2+\frac{1}{x_1x_2}=0,(x_1x_2)^2+1=0$，在实数范围内无解，故□不正确；

对于□ 

$M=\{(x,y)\mid y=e^x-2\}$，画出 $y=e^x-2$ 的图象，如图，直角 AOB 始终存在，即对于任意 $(x_1,y_1)\in M$，存在 $(x_2,y_2)\in M$，使得 $x_1x_2+y_1y_2=0$ 成立，故 □正确；

对于□，$M=\{(x,y)\mid y=\log_2x\}$，取点 $(1,0)$，曲线上不存在另外的点，使得两点与原点的连线互相垂直，所以不是“垂直对点集”，故□不正确，故答案为□□.

【点睛】本题主要考查向量垂直的坐标表示、新定义问题及数形结合思想的应用，属于难题.新定义题型的特点是：通过给出一个新概念，或约定一种新运算，或给出几个新模型来创设全新的问题情景，要求考生在阅读理解的基础上，依据题目提供的信息，联系所学的知识和

方法，实现信息的迁移，达到灵活解题的目的.遇到新定义问题，应耐心读题，分析新定义的特点，弄清新定义的性质，按新定义的要求，“照章办事”，逐条分析、验证、运算，使问题得以解决.

13．$16\left(\sqrt{2}-1\right)$

【分析】根据锐角三角函数可得$\left|AE\right|=\dfrac{\left|AB\right|}{\cos\theta},\left|AF\right|=\dfrac{\left|AD\right|}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)}$，即可由数量积的定义求解，结合和差角公式以及三角函数的性质即可求解最值.

【详解】设$\angle BAE=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则$\angle DAF=\dfrac{\pi}{4}-\theta$，

故$\left|AE\right|=\dfrac{\left|AB\right|}{\cos\theta},\left|AF\right|=\dfrac{\left|AD\right|}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)}$，

故$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\left|\overrightarrow{AE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AF}\right|\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{4}{\cos\theta}\dfrac{2}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)}$

$=\dfrac{8\sqrt{2}}{\cos\left[\theta+\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)\right]+\cos\left[\theta-\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)\right]}=\dfrac{8\sqrt{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)}$，

当$2\theta-\dfrac{\pi}{4}=k\pi,k\in\mathrm{Z}$时，$\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=1$，即$\theta=\dfrac{\pi}{8}$时，

此时$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$取最小值$\dfrac{8\sqrt{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1}=16\left(\sqrt{2}-1\right)$.

故答案为：$16\left(\sqrt{2}-1\right)$.

【点睛】关键点点睛：本题解决的关键是将所求转化为关于θ的表达式，从而得解，

14．$\dfrac{\pi}{3}$

【分析】先由题意，根据余弦函数的值域，求出$-f\left(x_1\right)\in\left[-1,\dfrac{1}{2}\right]$，再由题意，得到$f(x_2)$的取值范围应包含$\left[-1,\dfrac{1}{2}\right]$；根据预先函数的性质，得到为使$\left|m-n\right|$取最小值，只需函数$f(x)=\cos(2x-\dfrac{\pi}{6})$在$x\in[m,n]$上单调，分函数单调递增与单调递减两种情况，分别求解，即可得出结果.

【详解】因为$x_1\in[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}]$，所以$2x_1-\dfrac{\pi}{6}\in\left[-\dfrac{2}{3}\pi,\dfrac{\pi}{3}\right]$，因此$f\left(x_1\right)=\cos\left(2x_1-\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$；

则 $-f\left(x_1\right)\in\left[-1,\dfrac{1}{2}\right]$；

因为对于任意的 $x_1\in[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}]$，总存在 $x_2\in[m,n]$，使得 $f(x_1)+\ f(x_2)=0$，

所以 $f(x_2)$ 的取值范围应包含 $\left[-1,\dfrac{1}{2}\right]$，

根据余弦函数的性质，为使 $|m-n|$ 取最小值，

只需函数 $f(x)=\cos(2x-\dfrac{\pi}{6})$ 在 $x\in[m,n]$ 上单调，

若函数 $f(x)=\cos(2x-\dfrac{\pi}{6})$ 在 $x\in[m,n]$ 上单调递增；

则 $\begin{cases}f(m)=\cos(2m-\dfrac{\pi}{6})=-1\\ f(n)=\cos(2n-\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}\end{cases}$，所以 $\begin{cases}2m-\dfrac{\pi}{6}=-\pi+2k\pi,k\in Z\\ 2n-\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,k\in Z\end{cases}$，

即 $\begin{cases}m=-\dfrac{5}{12}\pi+k\pi,k\in Z\\ n=-\dfrac{\pi}{12}+k\pi,k\in Z\end{cases}$，则 $|m-n|$ 的最小值为 $\left|-\dfrac{5}{12}\pi+\dfrac{\pi}{12}\right|=\dfrac{\pi}{3}$；

若函数 $f(x)=\cos(2x-\dfrac{\pi}{6})$ 在 $x\in[m,n]$ 上单调递减；

则 $\begin{cases}f(m)=\cos(2m-\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}\\ f(n)=\cos(2n-\dfrac{\pi}{6})=-1\end{cases}$，所以 $\begin{cases}2m-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,k\in Z\\ 2n-\dfrac{\pi}{6}=\pi+2k\pi,k\in Z\end{cases}$，

即 $\begin{cases}m=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in Z\\ n=\dfrac{7\pi}{12}+k\pi,k\in Z\end{cases}$，则 $|m-n|$ 的最小值为 $\left|\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{7\pi}{12}\right|=\dfrac{\pi}{3}$；

故 $|m-n|$ 的最小值为 $\dfrac{\pi}{3}$.

【点睛】本题主要考查余弦三角函数的应用，熟记余弦函数的性质即可，属于常考题型.

15．(1) $ab=\dfrac{1}{4}$ ；(2) $\left[1,\sqrt{2}\right]$

【分析】（1）由三角函数的定义得出 $P\left(\cos\dfrac{\pi}{4},\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$，$Q\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right),\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)\right)$，通过当 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 时，$a=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)$，$b=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)$，进而求出 ab 的值；

（2）利用三角恒等变换的公式化简得 $b-a=\sqrt{2}\sin\theta$，得出 $1\leqslant\sqrt{2}\sin\theta\leqslant\sqrt{2}$，进而得到 $b-a$ 的取值范围.

【详解】(1) 由三角函数的定义，可得 $P\left(\cos\frac{\pi}{4},\sin\frac{\pi}{4}\right)$，$Q\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right),\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right)$

当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时，$Q\left(\cos\frac{5\pi}{12},\sin\frac{5\pi}{12}\right)$，即 $a=\cos\frac{5\pi}{12}$，$b=\sin\frac{5\pi}{12}$，

所以 $ab=\cos\frac{5\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\times2\times\cos\frac{5\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\times\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{4}$.

(2) 因为 $Q\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right),\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right)$，所以 $a=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$，$b=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$，

由三角恒等变换的公式，化简可得：

$b-a=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\sqrt{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\cos\frac{\pi}{4}-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\sin\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\sin\theta$，

因为 $\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $1\leqslant\sqrt{2}\sin\theta\leqslant\sqrt{2}$，

即 $b-a$ 的取值范围为 $\left[1,\sqrt{2}\right]$.

【点睛】本题主要考查了任意角的三角函数的定义，两角和与差的正、余弦函数的公式的应用，以及正弦函数的性质的应用，其中解答中熟记三角函数的定义与性质，以及两角和与差的三角函数的运算公式，准确运算是解答的关键，着重考查了推理与运算能力，属于基础题.

16．(1)最大值是 2，最小值是 -1；

(2) $\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$；

(3) $0<\omega\le\frac{1}{3}$ 或 $2\le\omega\le\frac{7}{3}$.

【分析】(1) 由 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，结合正弦函数的性质，可得函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值；

(2) 若 $f(x_0)=\frac{8}{5},x_0\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，可求 $2\sin\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)$，进而得出 $\cos\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)$，再由两角和与差的余弦公式求解；

(3) 求出 $y=f(\omega x)$，结合正弦函数的单调性，列不等式组，对 k 赋值，得出正数 ω 的取值范围.

【详解】(1) $f(x)=\sqrt{3}\sin2x+\cos2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

$\because x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$\therefore\frac{\pi}{6}\le2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{7\pi}{6}$，$\therefore-\frac{1}{2}\le\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\le1$

函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值是 2，最小值是 -1；

（2）$\because f\left(x_0\right)=\frac{8}{5}$，$\therefore 2\sin\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{8}{5}$，即 $\sin\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$

$\because x_0\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right],2x_0+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right]$，$\therefore \cos\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{3}{5}$

$\therefore \cos 2x_0=\cos\left[\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$

；

（3）$y=f\left(\omega x\right)=2\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，

令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2\omega x+\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathrm{Z}$，可得 $\frac{k\pi}{\omega}-\frac{\pi}{3\omega}\le x\le\frac{k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{6\omega}$，

令 $k=0$，可得 $-\frac{\pi}{3\omega}\le x\le\frac{\pi}{6\omega}$，

又 $y=f\left(\omega x\right)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ 上是单调递增函数，$\therefore\begin{cases}-\frac{\pi}{3\omega}\le\frac{\pi}{3}\\ \frac{\pi}{6\omega}\ge\frac{\pi}{2}\\ \omega>0\end{cases}$，解得 $0<\omega\le\frac{1}{3}$；

令 $k=1$，可得 $\frac{2\pi}{3\omega}\le x\le\frac{7\pi}{6\omega}$，

又 $y=f\left(\omega x\right)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ 上是单调递增函数，$\therefore\begin{cases}\frac{2\pi}{3\omega}\le\frac{\pi}{3}\\ \frac{7\pi}{6\omega}\ge\frac{\pi}{2}\\ \omega>0\end{cases}$，解得 $2\le\omega\le\frac{7}{3}$；

令 $k=2$，可得 $\frac{5\pi}{3\omega}\le x\le\frac{13\pi}{6\omega}$，

又 $y=f\left(\omega x\right)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ 上是单调递增函数，$\therefore\begin{cases}\frac{5\pi}{3\omega}\le\frac{\pi}{3}\\ \frac{13\pi}{6\omega}\ge\frac{\pi}{2}\\ \omega>0\end{cases}$，无解；

经检验，$k\ge 3$ 时，无解；

故正数 ω 的取值范围是 $0<\omega\le\frac{1}{3}$ 或 $2\le\omega\le\frac{7}{3}$