数学作业（二）

一、单选题

1．在平面直角坐标系中，若角α的终边经过点$P(-3,-4)$，则$\cos\alpha$的值为（　）

A．$-\frac{4}{5}$　　B．$-\frac{3}{5}$　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$\frac{4}{5}$

2．$\sin 240^\circ=$（　）

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{1}{2}$

3．$f(x)=\sin x\cos x$最小值是

A．-1　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．1

4．在平面直角坐标系xOy中，点$A(1,3),B(-2,k)$，若向量$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，则实数$k=$（　）

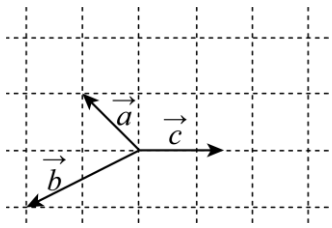
A．4　　B．3　　C．2　　D．$\frac{2}{3}$

5．已知单位向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，那么$|\vec{a}+2\vec{b}|=$（　）

A．$2\sqrt{3}$　　B．$\sqrt{7}$

C．$2\sqrt{7}$　　D．$4\sqrt{3}$

6．向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 在边长为 1 的正方形网格中的位置如图所示，若$\vec{e}$为与$\vec{c}$同方向的单位向量，则$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{e}$（　）



A．1.5　　B．2　　C．-4.5　　D．-3

7．在$\triangle ABC$中，$a=2,b=3,\cos B=\frac{\sqrt{7}}{4}$，则$\angle A=$（　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{5\pi}{6}$　　D．$\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$

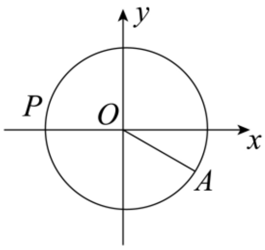
8．已知$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2},\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}$，则$\cos\alpha$的值为（　）

A．$-\frac{\sqrt{2}}{10}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{10}$　　C．$-\frac{7\sqrt{2}}{10}$　　D．$\frac{7\sqrt{2}}{10}$

9．将函数 y=sin2x 的图像向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位，再向上平移 1 个单位，所得图像的函数解析式是

A．$y=\cos 2x$　　B．$y=2\cos^2 x$　　C．$y=1+\sin(2x+\frac{\pi}{4})$　　D．$y=2\sin^2 x$

10．水车在古代是进行灌溉引水的工具，是人类的一项古老的发明，也是人类利用自然和改造自然的象征．如图是一个半径为R的水车，一个水斗从点$A(3\sqrt{3}$，$-3)$出发，沿圆周按逆时针方向匀速旋转，且旋转一周用时60秒．经过t秒后，水斗旋转到P点，设P的坐标为(x,y)，其纵坐标满足$y=f(t)=R\sin(\omega t+\varphi)(t\geqslant 0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2})$．则下列叙述错误的是（　　）



A．$R=6,\omega=\frac{\pi}{30},\varphi=-\frac{\pi}{6}$

B．当$t\in[35$，$55]$时，点P到x轴的距离的最大值为6

C．当$t\in[10$，$25]$时，函数$y=f(t)$单调递减

D．当$t=20$时，$|PA|=6\sqrt{3}$

11．“$\sin\alpha=\cos\alpha$”是“$\cos 2\alpha=0$”的（ ）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

12．函数$y=\sqrt{3}\cos(3x-\theta)-\sin(3x-\theta)$是奇函数，则$\theta$等于（以下$k\in\mathbf{Z}$）（　　）

A．$-\frac{\pi}{3}+k\pi$　　B．$k\pi$　　C．$\frac{\pi}{6}+k\pi$　　D．$\frac{\pi}{3}+k\pi$

13．已知函数$f\left(x\right)=\sin 2x+\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$，则（　　）

A．$f\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$

B．$\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$是函数$f\left(x\right)$的一个对称中心

C．任取方程$f\left(x\right)=1$的两个根x_1，x_2，则$\left|x_1-x_2\right|$是π的整数倍

D．对于任意的$x_1,x_2,x_3\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，$f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)\geq f\left(x_3\right)$恒成立

二、填空题

14．$\sin 15°\cos 75°+\cos 15°\sin 75°$的值是_________．

15．已知$\tan\alpha=-\frac{1}{2}$，则$\tan(\pi+2\alpha)=$_________.

16．在$\triangle ABC$中，若$a=3,b=2,\cos C=-\frac{1}{3}$，则$c=$_________.

17. 已知$\vec{e_1},\vec{e_2}$是单位向量，且$\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}=0$，设向量$\vec{a}=\lambda\vec{e_1}+\mu\vec{e_2}$，当$\lambda=\mu=1$时，$\langle\vec{a},\vec{e_1}\rangle=$_________；

当$\lambda+\mu=2$时，$|\vec{a}-\vec{e_1}|$的最小值为_________.

18．在$\triangle ABC$中，$a^2=bc$，若$\angle A=\frac{\pi}{3}$，则$\angle B$的大小是_________.

19．已知在同一平面上的3个单位向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，它们相互之间的夹角均为$120°$，且

$|k\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|>1$，则实数$k$的取值范围是_________.

20．已知函数$f(x)=\sin^4x+\cos^4x$，给出下列四个结论：

□ $f(x)$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$；

□ $f(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减；

□ $f(x)$的最大值为1；

□当$x=\frac{k\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$时，$f(x)$取得最大值或最小值.

以上正确结论的序号是_________.（写出所有正确的序号）

三、解答题

21．已知$-\frac{\pi}{2}<\alpha<0,\cos\alpha=\frac{3}{5}$.

(1)求$\tan\alpha$的值；

(2)求$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$的值.

22．已知函数 $f(x)=\cos x\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)$.

(1)求 $f(\pi)$ 的值；

(2)求函数 $f(x)$ 的单调增区间；

(3)当 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$时，求 $f(x)$ 的最大值与最小值.

23．在 $\triangle ABC$ 中，$bc=a^2-b^2-c^2$.

(1)求 $\angle A$的大小；

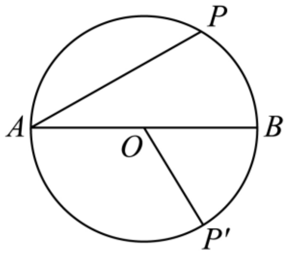
(2)再从条件□、条件□、条件□这三个条件中选择两个作为已知，使得 $\triangle ABC$ 存在，求 $\triangle ABC$ 的面积.

条件□：$\cos B=\frac{1}{3}$；

条件□：$\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

条件□：$a=2\sqrt{3}$.

24．如图，点 P 是以 AB 为直径的圆 O 上动点，P' 是点 P 关于 AB 的对称点，$AB=2$.



(1)当点 P 是弧 AB 上靠近 B 的三等分点时，求 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的值；

(2)求 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OP'}$ 的最大值和最小值.

25．已知集合$S_n=\left\{X\left|X=(x_1,x_2,\cdots x_n),x_i\in N^*,i=1,2,\cdots n\right.\right\}(n\geq 2)$.对于

$A=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right),B=\left(b_1,b_2,\cdots,b_n\right)\in S_n$，给出如下定义：□$\overrightarrow{AB}=\left(b_1-a_1,b_2-a_2,\cdots,b_n-a_n\right)$；

□$\lambda\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)=\left(\lambda a_1,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n\right)(\lambda\in\mathbf{R})$；□$A$与$B$之间的距离为$d(A,B)=\sum_{i=1}^{n}\left|a_i-b_i\right|$.说明：

$\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)=\left(b_1,b_2,\cdots,b_n\right)$的充要条件是$a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$.

(1)当$n=5$时，设$A=(1,2,1,2,5),B=(2,4,2,1,3)$，求$d(A,B)$；

(2)若$A,B,C\in S_n$，且存在$\lambda>0$，使得$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BC}$，求证：$d(A,B)+d(B,C)=d(A,C)$；

(3)记$I=(1,1,\cdots,1)\in S_{20}$.若$A,B\in S_{20}$，且$d(I,A)=d(I,B)=13$，求$d(A,B)$的最大值.

参考答案：

1．B

【分析】根据三角函数的定义，直接计算，即可得出结果.

【详解】□ $x=-3, y=-4,$ □ $r=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$，

□ $\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{-3}{5}=-\frac{3}{5}$，

故选：B.

【点睛】本题主要考查由三角函数定义求三角函数值，属于基础题型.

2．B

【分析】利用诱导公式进行化简并求值

【详解】$\because \sin 240^\circ=\sin\left(180^\circ+60^\circ\right)=-\sin 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

故选：B

3．B

【详解】试题分析：□ $f(x)=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$，□当 sin2x=-1 即 x=$k\pi-\frac{\pi}{4}(k\in Z)$ 时，函数 $f(x)=\sin x\cos x$ 有最小值是$-\frac{1}{2}$，故选 B

考点：本题考查了三角函数的有界性

点评：熟练掌握二倍角公式及三角函数的值域是解决此类问题的关键，属基础题

4．D

【分析】首先求出$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$，依题意可得$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，根据向量数量积的坐标表示得到方程，解得即可；

【详解】解：因为$A(1,3),B(-2,k)$，所以$\overrightarrow{OA}=(1,3)$、$\overrightarrow{OB}=(-2,k)$，

又$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-2\times1+3k=0$，解得$k=\frac{2}{3}$；

故选：D

5．B

【分析】对式子先平方后开方可得结果.

【详解】由题可知：$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1, \vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

所以$\sqrt{\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)^2}=\sqrt{\vec{a}^2+4\vec{b}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}}=\sqrt{7}$

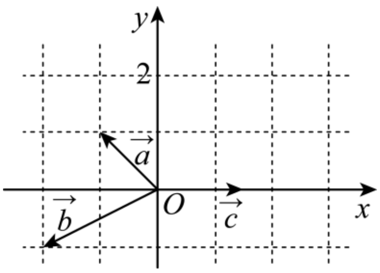
故选：B

6．D

【分析】首先建系，确定向量的坐标，根据向量数量积的坐标表示求解.

【详解】如图，建立平面直角坐标系，由图可知$\vec{a}=(-1,1)$，$\vec{b}=(-2,-1)$，$\vec{e}=(1,0)$，

则$\vec{a}+\vec{b}=(-3,0)$，所以$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{e}=-3$.



故选：D

7．A

【分析】先求出$\sin B$，再借助正弦定理求解即可.

【详解】由$\cos B=\frac{\sqrt{7}}{4}$得$\sin B=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}=\frac{3}{4}$，由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，$\frac{2}{\sin A}=\frac{3}{\frac{3}{4}}$，

解得$\sin A=\frac{1}{2}$，又$a<c$，故$\angle A<\angle C$，$\angle A=\frac{\pi}{6}$.

故选：A.

8．C

【分析】首先由同角三角函数的基本关系求出$\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{4}\right)$，再根据

$\cos\alpha=\cos\left[\left(\alpha-\frac{3\pi}{4}\right)+\frac{3\pi}{4}\right]$利用两角和的余弦公式计算可得；

【详解】解：因为$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，所以$\frac{\pi}{4}<\alpha-\frac{3\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$，又$\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}$，

所以$\frac{\pi}{4}<\alpha-\frac{3\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$，所以$\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{4}\right)}=\frac{4}{5}$，

所以$\cos\alpha=\cos\left[\left(\alpha-\frac{3\pi}{4}\right)+\frac{3\pi}{4}\right]$

$=\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{4}\right)\cos\frac{3\pi}{4}-\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{4}\right)\sin\frac{3\pi}{4}$

$=\frac{3}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$

故选：C

9．B

【详解】由题意知:平移后的函数解析式为$y=1+\sin 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1+2\sin(2x+\frac{\pi}{2})$

$=1+2\cos 2x=2\cos^2 x$,选 B.

10．C

【分析】求出各变量的值得选项 A 正确；点P到x轴的距离的最大值为 6，故选项 B 正确；函数$y=f(t)$在$t\in[10，25]$不是单调递减，故选项 C 不正确；$|PA|=\sqrt{27+81}=6\sqrt{3}$，故选项 D 正确.

【详解】对于选项 A,由题意，$R=\sqrt{27+9}=6$，$T=60=\frac{2\pi}{\omega}$，$\therefore \omega=\frac{\pi}{30}$，

点$A(3\sqrt{3}，-3)$代入可得$-3=6\sin\varphi$，$\because|\varphi|<\frac{\pi}{2})$，$\therefore \varphi=-\frac{\pi}{6}$．故选项A 正确；

对于选项 B，$f(t)=6\sin(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6})$，当$t\in[35，55]$时，$\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\in[\pi，\frac{5}{3}\pi]$，$\therefore$点$P$到$x$轴的距离的最大值为 6，故选项 B 正确；

对于选项 C，当$t\in[10，25]$时，$\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\in[\frac{1}{6}\pi，\frac{2\pi}{3}]$，函数$y=f(t)$不是单调递减，故选项 C 不正确；

对于选项 D，当$t=20$时，$\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，$P$的纵坐标为 6，$|PA|=\sqrt{27+81}=6\sqrt{3}$，故选项 D 正确.

故选：C.

【点睛】关键点睛：解答本题的关键是判断选项 C 的真假，直接利用复合函数的单调性判断效率比较高．当$t\in[10，25]$时，$\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\in[\frac{1}{6}\pi，\frac{2\pi}{3}]$，函数$y=f(t)$不是单调递减．如果直接求函数的单调递减区间就比较复杂.

11．A

【详解】试题分析：因为$\cos 2\alpha=0\Leftrightarrow\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0\Leftrightarrow|\sin\alpha|=|\cos\alpha|$，所以

“$\sin\alpha=\cos\alpha$”是“$\cos 2\alpha=0$”的充分不必要条件；故选 A.

考点：1．二倍角公式；2．充分条件和必要条件的判定.

12．A

【分析】根据题意，化简函数的解析式可得$y=-2\sin(3x-\frac{\pi}{3}-\theta)$，结合正弦函数的性质可得若函数为奇函数，则有$-\frac{\pi}{3}-\theta=-k\pi$,从而可得答案.

【详解】根据题意，$y=\sqrt{3}\cos(3x-\theta)-\sin(3x-\theta)=2\sin(\frac{\pi}{3}-3x+\theta)=-2\sin(3x-\frac{\pi}{3}-\theta)$

若函数为奇函数，则有$-\frac{\pi}{3}-\theta=-k\pi$,即$\theta=k\pi-\frac{\pi}{3}$，$k\in Z$.

故选：A．

13．D

【分析】A．先求解出$f\left(x\right)$的解析式，再判断$x=\frac{\pi}{3}$是否为对称轴；

B．根据$f\left(x\right)$的解析式判断出对称中心的位置变化，再根据$f\left(-\frac{\pi}{12}\right)$的取值确定出对称中心；

C．根据正弦型函数图象的对称中心分布特点，确定出$\left|x_1-x_2\right|$的取值情况；

D．先求解出$f\left(x\right)$在$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上的值域，然后根据$2f\left(x\right)_{\min}$，$f\left(x\right)_{\max}$的大小关系判断不等式是否恒成立.

【详解】因为$f\left(x\right)=\sin 2x+\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1=\frac{3}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+1=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$，所以$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)+1=\frac{\sqrt{3}}{2}+1$，

所以$f\left(\frac{\pi}{3}\right)$既不是最大值也不是最小值，所以直线$x=\frac{\pi}{3}$不是其图象的对称轴，故$A$错误；

因为图象整体向上平移了一个单位长度，所以对称中心也向上平移了一个单位长度，

且$f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{3}\sin 0+1=1$，所以点$\left(-\frac{\pi}{12},1\right)$是其对称中心，故$B$错误；

任取方程$f(x)=1$得到的两个根，即为方程$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=0$的任意两根，

它们之间相差为$\frac{T}{2}$的整数倍，且$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，所以它们彼此之间相差的是$\frac{\pi}{2}$的整数倍，故C错误；

当$x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$时，$\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$，此时$f(x)$的最小值为$\frac{\sqrt{3}}{2}+1$，最大值为$\sqrt{3}+1$，

所以对于任意的$x_1,x_2,x_3\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，$f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)\geq\sqrt{3}+2>\sqrt{3}+1\geq f\left(x_3\right)$恒成立，故$D$正确.

故选：D.

14．1

【分析】直接利用两角和的正弦公式计算可得；

【详解】解：$\sin 15^\circ \cos 75^\circ + \cos 15^\circ \sin 75^\circ = \sin\left(15^\circ + 75^\circ\right) = \sin 90^\circ = 1$

故答案为：1

15．$-\frac{4}{3}$

【分析】利用诱导公式及二倍角正切公式计算可得；

【详解】解：因为$\tan\alpha = -\frac{1}{2}$，

所以$\tan(\pi + 2\alpha) = \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{4}{3}$；

故答案为：$-\frac{4}{3}$

16．$\sqrt{17}$

【分析】由余弦定理直接计算可得.

【详解】由余弦定理可得$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 9+4+4 = 17$

所以$c = \sqrt{17}$.

故答案为：$\sqrt{17}$

17．　$\frac{\pi}{4}/45^\circ$　　$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【分析】求出$\left|\vec{a}\right|$，根据夹角公式可得$\left\langle \vec{a}, \vec{e_1} \right\rangle$，将$\left|\vec{a} - \vec{e_1}\right|$表示为关于$\lambda$的二次函数，求出最小值即可.

【详解】当$\lambda = \mu = 1$时，$\vec{a} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$，$\left|\vec{a}\right|^2 = \vec{e_1}^2 + 2\vec{e_1}\cdot\vec{e_2} + \vec{e_2}^2 = 2$，即$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{2}$，

$\cos\left\langle \vec{a}, \vec{e_1} \right\rangle = \frac{\vec{a}\cdot\vec{e_1}}{\left|\vec{a}\right|\times\left|\vec{e_1}\right|} = \frac{\left(\vec{e_1}+\vec{e_2}\right)\cdot\vec{e_1}}{\left|\vec{a}\right|\times\left|\vec{e_1}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$，

因为$\left\langle \vec{a}, \vec{e_1} \right\rangle \in [0, \pi]$，所以$\left\langle \vec{a}, \vec{e_1} \right\rangle = \frac{\pi}{4}$；

当$\lambda + \mu = 2$时，$\vec{a} - \vec{e_1} = (\lambda - 1)\vec{e_1} + \mu\vec{e_2} = (\lambda - 1)\vec{e_1} + (2-\lambda)\vec{e_2}$

则$\left|\vec{a} - \vec{e_1}\right|^2 = (\lambda - 1)^2 + (2-\lambda)^2 = 2\left(\lambda - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$，

当 $\lambda=\dfrac{3}{2}$ 时，$\left|\vec{a}-\vec{e_1}\right|$ 的最小值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

故答案为：$\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

18．$\dfrac{\pi}{3}/60^\circ$

【分析】由余弦定理结合已知可的 b、c 关系，进而可得 $\triangle ABC$ 的形状，然后可解.

【详解】由余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\dfrac{\pi}{3}=b^2+c^2-bc=bc$

整理得 $(b-c)^2=0$，即 $b=c$

由 $\angle A=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形

所以 $\angle B=\dfrac{\pi}{3}$.

故答案为：$\dfrac{\pi}{3}$

19．$(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

【分析】通过平方将向量的模转化为数量积，解不等式可得.

【详解】因为 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为单位向量，且相互之间的夹角均为 $120°$

所以 $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{b}=1\times1\times\cos120°=-\dfrac{1}{2}$

因为 $|k\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|>1$

所以 $|k\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=k^2\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2k\vec{a}\cdot\vec{b}+2k\vec{a}\cdot\vec{c}+2\vec{b}\cdot\vec{c}=k^2-2k+1>1$

即 $k(k-2)>0$，解得 $k<0$ 或 $k>2$

即实数 k 的取值范围是 $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.

故答案为：$(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

20．□□□

【分析】化简 $f(x)=\dfrac{1}{4}\cos4x+\dfrac{3}{4}$,利用余弦函数的质对□□□□四个选项逐一分析即可.

【详解】$f(x)=\sin^4x+\cos^4x=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x=\dfrac{1}{4}\cos4x+\dfrac{3}{4}$.

所以周期 $T=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$.故□正确；

$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow4x\in[0,2\pi]$，所以 $f(x)$ 不单调.故□错误；

$f(x)_{\max}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}=1$.故□正确；

令$4x=k\pi,k\in Z$，则$x=\frac{k\pi}{4}$，即$x=\frac{k\pi}{4},k\in Z$时，$f(x)$取得最大值或最小值.故□正确.

故答案为：□□□

21．(1)$-\frac{4}{3}$

(2)$-\frac{1}{7}$

【分析】（1）利用同角三角函数即可求解；

（2）利用两角和的正切公式即可求解.

【详解】（1）因为$-\frac{\pi}{2}<\alpha<0,\cos\alpha=\frac{3}{5}$，所以$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$，

所以$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{4}{3}$.

（2）因为$\tan\alpha=-\frac{4}{3}$，所以$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\cdot\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{-\frac{4}{3}+1}{1-\left(-\frac{4}{3}\right)\times 1}=-\frac{1}{7}$.

22．(1) $f(\pi)=\frac{1}{2}$.

(2)$\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right](k\in Z)$.

(3)所以$f(x)$的最大值为$\frac{3}{4}$，最小值为0.

【分析】（1）由三角函数中的恒等变换应用可得$f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{4}$，将$x=\pi$代入即可得出答案;

（2）令$2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，可得单调增区间;

（3）由$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，可得$-\frac{\pi}{6}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{5\pi}{6}$，利用正弦函数的性质从而可求函数$f(x)$的最大值与最小值.

【详解】（1）

$$f(x)=\cos x\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)=\frac{1}{2}\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{4},$$

$f(\pi)=\frac{1}{2}\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

（2）由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow k\pi-\frac{\pi}{3}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in Z)$,

所以函数 $f(x)$ 的单调增区间是 $\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right](k\in Z)$.

（3）由 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，可得 $-\frac{\pi}{6}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{5\pi}{6}$,，从而 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$,

所以函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[0,\frac{3}{4}\right]$.

所以 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{3}{4}$，最小值为 0.

23．(1) $A=\frac{2\pi}{3}$

(2)选条件□□，$S_{\triangle ABC}=3-\sqrt{3}$

【分析】（1）由余弦定理 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 结合 $0<A<\pi$，即可求出 $A=\frac{2\pi}{3}$；

（2）由（1）可知 $B+C=\frac{\pi}{3}$，则可得出 $\sin B<\frac{\sqrt{3}}{2}$，而条件□等价于 $\sin B=\frac{2\sqrt{2}}{3}>\frac{\sqrt{3}}{2}$ 故条件□恒不成立，即选择条件□□，利用正弦定理可求出 $c=\frac{a\cdot\sin C}{\sin A}=2\sqrt{2}$，再由 $\sin B=\sin\left(\frac{\pi}{3}-C\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，代入 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B$，即可求出答案.

【详解】（1）由余弦定理得：$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{-bc}{2bc}=-\frac{1}{2}$

又 $0<A<\pi$

所以 $A=\frac{2\pi}{3}$.

（2）因为 $A=\frac{2\pi}{3}$，所以 $B+C=\frac{\pi}{3}$,

所以 $\sin B<\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

当 $\cos B=\frac{1}{3}$ 时，$\sin B=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}>\frac{\sqrt{3}}{2}$，与 $\sin B<\frac{\sqrt{3}}{2}$ 矛盾，故条件□恒不成立，

则选择条件□：$\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 与条件□：$a=2\sqrt{3}$.

由正弦定理得：$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow c=\frac{a\cdot\sin C}{\sin A}=\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$,

又因为$0<C<\frac{\pi}{3}$，$\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$

所以$\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以$\sin B=\sin\left(\frac{\pi}{3}-C\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=3-\sqrt{3}$.

24．(1)3

(2)最小值$-\frac{9}{8}$，最大值 2.

【分析】（1）建立平面直角坐标系，利用数量积的坐标表示直接计算可得；

（2）设点P坐标，将所求数量积用坐标表示，结合点P坐标满足圆的方程，消元后由二次函数的性质可得.

【详解】（1）以O为原点，AB所在直线为x轴，AB的垂直平分线为y轴建立平面直角坐标系，

则$A(-1,0),B(1,0)$

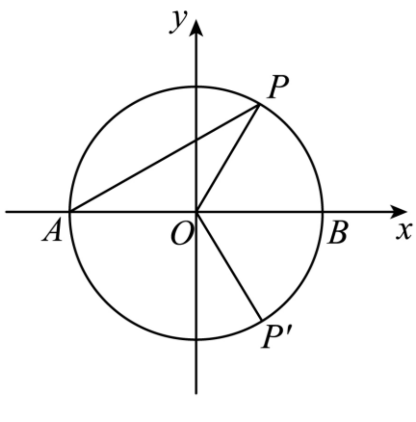
因为点P是弧AB上靠近B的三等分点，不妨设点P在x轴上方，

所以$\angle POB=\frac{\pi}{3}$

又$OB=1$，所以$P(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$

所以$\overrightarrow{AP}=(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{AB}=(2,0)$

则$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=3$



（2）设点$P(x_0,y_0)$，则$P'(x_0,-y_0)$

则 $\overrightarrow{AP}=(x_0+1,y_0),\overrightarrow{OP'}=(x_0,-y_0)$

所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OP'}=x_0(x_0+1)-y_0^2\dots$□

又因为点 P 在圆 $x^2+y^2=1$ 上，

所以 $y_0^2=1-x_0^2(-1\le x_0\le 1)$，代入□可得

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OP'}=x_0(x_0+1)-1+x_0^2=2x_0^2+x_0-1=2(x_0+\dfrac{1}{4})^2-\dfrac{9}{8}$

当 $x_0=-\dfrac{1}{4}$ 时，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OP'}$ 有最小值 $-\dfrac{9}{8}$，当 $x_0=1$ 时，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OP'}$ 有最大值 2.

25．(1) $d(A,B)=7$

(2)见解析

(3)26

【分析】（1）当 $n=5$ 时，直接利用 $d(A,B)=\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i-b_i|$ 求得 $d(A,B)$ 的值

（2）设 $A=\{a_1,a_2,\cdots a_n\},B=\{b_1,b_2,\cdots b_n\},C=\{c_1,c_2\cdots c_n\}$，则由题意可得

$\exists\lambda>0$，使得 $b_i-a_i=\lambda(c_i-b_i)$，其中 $i=1,2,\cdots n$，得出 b_i-a_i 与 c_i-b_i 同为非负数或同为负数，由此计算 $d(A,B)+d(B,C)$ 的结果，计算 $d(A,C)$ 的结果，从而得出结论

（3）设 $b_i-a_i(i=1,2\cdots,20)$ 中有 $m(m\le 20)$ 项为非负数，$20-m$ 项为负数

不妨设 $i=1,2\cdots m$ 时，$b_i-a_i\ge 0$，$i=m+1,m+2,\cdots,20$ 时，$b_i-a_i<0$

利用 $d(I,A)=d(I,B)=13$，得到 $\therefore\sum\limits_{i=1}^{20}a_i=\sum\limits_{i=1}^{20}b_i$

得到 $d\left(A,B\right)=\sum\limits_{i=1}^{20}|b_i-a_i|=2\left[b_1+b_2+\cdots+b_m-\left(a_1+a_2+\cdots+a_m\right)\right]$

求出 $a_1+a_2+\cdots+a_m\ge m$，$b_1+b_2+\cdots+b_m\le 13+m$，即可得到 $d(A,B)$ 的最大值

得到 $d(A,B)\le 26$，再验证得到成立的条件即可；

【详解】（1）解：由于 $d(A,B)=\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i-b_i|$，$A=(1,2,1,2,5),B=(2,4,2,1,3)$

则 $d(A,B)=|1-2|+|2-4|+|1-2|+|2-1|+|5-3|=7$

故 $d(A,B)=7$

（2）解：设 $A=\{a_1,a_2,\cdots a_n\},B=\{b_1,b_2,\cdots b_n\},C=\{c_1,c_2\cdots c_n\}$

$\because \exists\lambda>0$, 使 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BC}$，

$\therefore \exists\lambda>0$, 使得：$(b_1-a_1,b_2-a_2,\cdots b_n-a_n)=\lambda(c_1-b_1,c_2-b_2\cdots c_n-b_n)$，

$\therefore \exists\lambda>0$ ，使得 $b_i-a_i=\lambda(c_i-b_i)$ ，其中 $i=1,2,\cdots n$ ，

$\therefore b_i-a_i$ 与 $c_i-b_i(i=1,2,\cdots n)$ 同为非负数或同为负数，

$\therefore |b_i-a_i|+|c_i-b_i|=|c_i-a_i|$

$\therefore d(A,B)+d(B,C)=\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i-b_i|+\sum\limits_{i=1}^{n}|b_i-c_i|=\sum\limits_{i=1}^{n}(|b_i-a_i|+|c_i-b_i|)=\sum\limits_{i=1}^{n}|c_i-a_i|=d(A,C)$，故得证；

（3）解：$d(A,B)=\sum\limits_{i=1}^{20}|b_i-a_i|$

设 $b_i-a_i(i=1,2\cdots,20)$ 中有 $m(m\le 20)$ 项为非负数，$20-m$ 项为负数

不妨设 $i=1,2\cdots m$ 时，$b_i-a_i\ge 0$

$i=m+1,m+2,\cdots,20$ 时，$b_i-a_i<0$

所以 $d(A,B)=\sum\limits_{i=1}^{20}|b_i-a_i|$

$=[(b_1+b_2+\cdots+b_m)-(a_1+a_2+\cdots+a_m)]+[(a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots a_{20})-(b_{m+1}+b_{m+2}+\cdots b_{20})]$

$\because\ d(I,A)=d(I,B)=13$

$\therefore \sum\limits_{i=1}^{20}(a_i-1)=\sum\limits_{i=1}^{20}(b_i-1)$ ，整理得 $\sum\limits_{i=1}^{20}a_i=\sum\limits_{i=1}^{20}b_i$

$\therefore d(A,B)=\sum\limits_{i=1}^{20}|b_i-a_i|$

$=\left[\left(b_i+b_2+\cdots+b_m\right)-\left(a_1+a_2+\ldots+a_m\right)\right]+\left[\left(a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{20}\right)-\left(b_{m+1}+b_{m+2}+\cdots+b_{20}\right)\right]$

$=2[b_1+b_2+\cdots+b_m-(a_1+a_2+\cdots+a_m)]$

$\because b_1+b_2+\cdots+b_m=(b_1+b_2+\cdots+b_{20})-(b_{m+1}+b_{m+2}+\cdots+b_{20})$

$\le(13+20)-(20-m)\times 1=13+m$

又 $a_1+a_2+\cdots+a_m\ge m\times 1=m$

$\therefore d(A,B)=2[b_1+b_2+\cdots+b_m-(a_1+a_2+\cdots+a_m)]\le 2[(13+m)-m]=26$

即 $d(A,B)\le 26$

对于 $A=(1,1,1,\cdots,14),B=(14,1,1,\cdots 1)$

有 $A,B\in S_{20}$ ，且 $d(I,A)=d(I,B)=13$

$d(A,B)=26$

综上所得，$d(A,B)$ 的最大值为 26