数学作业（一）

一、单选题

1．下列各角中，与27°角终边相同的是（　　）

A．63°　　B．153°　　C．207°　　D．387°

2．在$\triangle ABC$中，A为钝角，则点$P\left(\cos A,\tan B\right)$（　　）

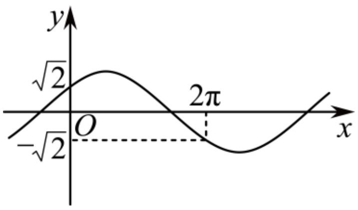
A．在第一象限　　B．在第二象限

C．在第三象限　　D．在第四象限

3．已知$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，且角α，β的终边关于y轴对称，则$\cos\beta=$（　　）

A．$\frac{3}{5}$　　B．$-\frac{3}{5}$　　C．$\frac{4}{5}$　　D．$-\frac{4}{5}$

4．已知函数$f\left(x\right)=2\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(\omega>0\right)$的图象如图所示，则$\omega$的值为（　　）



A．2　　B．1　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{4}$

5．下列函数中，周期为$\frac{\pi}{2}$的偶函数为（　　）

A．$y=\sin 4x$　　B．$y=\cos 2x$　　C．$y=\tan 4x$　　D．$y=\sin^2 2x$

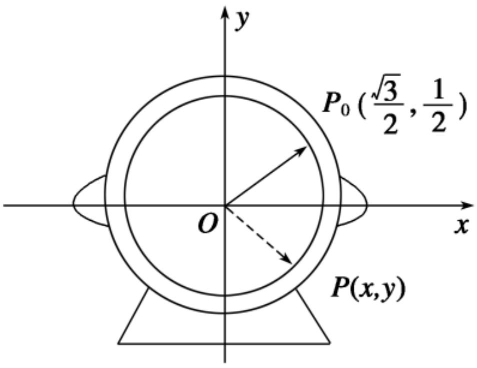
6．如果角α的终边在直线$y=2x$上，则$\frac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{3\sin\alpha-\cos\alpha}=$（　　）

A．$-\frac{4}{5}$　　B．$\frac{4}{5}$　　C．$-\frac{5}{4}$　　D．$\frac{5}{4}$

7．若将函数$f\left(x\right)=2\sin x$的图像先向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，再保持纵坐标不变，并将图像上所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍，得到函数$g\left(x\right)$的图象，则函数$y=g\left(x\right)$图像的对称中心可能是（　　）

A．$\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$　　B．$\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$　　C．$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$　　D．$\left(\frac{\pi}{6},0\right)$

8．如图，为了研究钟表与三角函数的关系，建立如图所示的坐标系，设秒针尖位置p（x，y）．若初始位置为$P_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，当秒针从$P_0$（注此时$t$=0）正常开始走时，那么点$P$的纵坐标$y$与时间$t$的函数关系为（　　）



A．$y=\sin\left(\frac{\pi}{30}t+\frac{\pi}{6}\right)$　　B．$y=\sin\left(-\frac{\pi}{60}t-\frac{\pi}{6}\right)$

C．$y=\sin\left(-\frac{\pi}{30}t+\frac{\pi}{6}\right)$　　D．$y=\sin\left(-\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)$

二、填空题

9．已知向量$\vec{a}=(-2,-3)$，$\vec{b}=(6,m)$.若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$m=$________.

10．已知圆的半径为2，则$\frac{\pi}{5}$的圆心角所对的弧长为_____.

11．已知$\tan\alpha,\tan\beta$是方程$x^2+3\sqrt{3}x+4=0$的两根，则$\tan(\alpha+\beta)$等于________.

12．设向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为$60°$，且$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=4$，则$|\vec{a}-\vec{b}|=$________.

13．已知函数$f(x)=\sin x$，若对任意$x\in\mathbf{R}$都有$f(x)+f(x+m)=c$（c为常数），则常数m的一个取值为_______.

14．关于函数$f(x)=|\sin x|+|\cos x|$，给出下列四个结论：

□函数$f(x)$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$；

□函数$f(x)$的最小值是1；

□函数$f(x)$的最大值是$\sqrt{2}$；

□函数$f(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增.

其中全部正确结论的序号是________.

15．在平面直角坐标系xOy中，角α以Ox为始边，它的终边与以原点O为圆心的单位圆交于点$P(x,\frac{3}{5})$，则$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=$_____.

16．梯形$ABCD$中，$AB\parallel CD$，$AB=2$，$AD=CD=1$，$\angle BAD=90°$，点P在线段BC上运动.

（1）当点P与点C重合时，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AP}=$________.

（2）$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$的最小值是________.

17．已知点$A\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$，$B\left(x_2, f\left(x_2\right)\right)$是函数$f\left(x\right)=2\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(\omega>0,-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<0\right)$图像上的任意两点，角$\varphi$的终边经过点$P\left(1,-\sqrt{3}\right)$，且当$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|=4$时，$\left|x_1-x_2\right|$的最小值为$\dfrac{\pi}{3}$.又对任意$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]$，不等式$mf\left(x\right)+2m\geq f\left(x\right)$恒成立，则$\omega=$________，实数$m$的取值范围是________.

18．已知函数$f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)\left(\omega>0\right)$在区间$\left[0,\pi\right]$上有且仅有4条对称轴，给出下列四个结论，其中所有正确结论的序号是________.

□$f\left(x\right)$在区间$\left(0,\pi\right)$上有且仅有3个不同的零点；

□$f\left(x\right)$的最小正周期可能是$\dfrac{\pi}{2}$；

□ω的取值范围是$\left[\dfrac{13}{4},\dfrac{17}{4}\right)$；

□$f\left(x\right)$在区间$\left(0,\dfrac{\pi}{15}\right)$上单调递增.

三、解答题

19．已知角α的终边过点$P\left(-3m,8\right)$，且$\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$.

(1)求m，$\sin\alpha$，$\tan\alpha$的值；

(2)求$\cos 2\alpha$，$\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$的值.

20．已知函数 $f\left(x\right)=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$.

(1)求 $f\left(x\right)$ 的最小正周期和单调递减区间；

(2)若函数 $y=f\left(\omega x\right)\left(\omega>0\right)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 上无零点，求 ω 的取值范围.

21．已知 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 同时满足下列四个条件中的三个：

□ $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$；□ $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图像可以由 $y=\sin x-\cos x$ 的图像平移得到；

□相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$；□最大值为 2.

(1)请直接指出这三个条件，并求出 $f\left(x\right)$ 的解析式；

(2)若曲线 $y=f\left(x\right)$ 的对称轴只有一条落在区间 $\left[0,m\right]$ 上，求 m 的取值范围.

22．已知函数 $f\left(x\right)=2\sin x\cos x+2\sqrt{3}\cos^{2}x-\sqrt{3}$.

(1)求 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值；

(2)若函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-k$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上有两个不同的零点，请直接写出实数 k 的取值范围（不需过程）.

23．在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，A 、B 、C 三点满足 $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$.

(1)已知 $A\left(3,0\right)$ ，$B\left(0,3\right)$ ，求 $\cos\left\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{OC}\right\rangle$ ；

(2)已知 $A\left(1,\cos x\right)$ ，$B\left(1+\sin x,\cos x\right)$ ，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ，$f\left(x\right)=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\left(2m+\frac{1}{3}\right)\left|\overrightarrow{AB}\right|+m^{2}$ 的最小值为5，求实数 m 的值.

24．已知函数 $y=f\left(x\right)$ 的定义域为区间 D，若对于给定的非零实数 m，存在 x_0，使得 $f\left(x_0\right)=f\left(x_0+m\right)$，则称函数 $y=f\left(x\right)$ 在区间 D 上具有性质 $P\left(m\right)$.

(1)判断函数 $f\left(x\right)=x^2$ 在区间 $\left[-1,1\right]$ 上是否具有性质 $P\left(\dfrac{1}{2}\right)$，并说明理由；

(2)若函数 $f\left(x\right)=\sin x$ 在区间 $\left(0,n\right)\left(n>0\right)$ 上具有性质 $P\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，求 n 的取值范围；

(3)已知函数 $y=f\left(x\right)$ 的图像是连续不断的曲线，且 $f\left(0\right)=f\left(2\right)$，求证：函数 $y=f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,2\right]$ 上具有性质 $P\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

参考答案：

1．D

【解析】写出与27°终边相同角的集合，取k值得答案.

【详解】与27°角终边相同的角的集合为$\left\{\alpha \middle| \alpha = 27^\circ + k\cdot 360^\circ, k\in Z\right\}$，

取$k=1$，可得$\alpha = 387^\circ$.

□与27°角终边相同的是387°.

故选：D

【点睛】本小题主要考查终边相同的角，属于基础题.

2．B

【分析】根据角的范围确定三角函数的正负即可求解.

【详解】在$\triangle ABC$中，A为钝角，则B为锐角，则$\cos A<0,\tan B>0$，

则点$P\left(\cos A,\tan B\right)$在第二象限，

故选：B

3．B

【分析】首先根据对称性，求α,β的关系，根据诱导公式，即可求解.

【详解】因为角α，β的终边关于y轴对称，所以$\alpha+\beta=\pi+2k\pi$，$k\in \mathrm{Z}$，

即$\beta=-\alpha+\pi+2k\pi$，$\cos\beta=\cos\left(-\alpha+\pi+2k\pi\right)=-\cos\alpha=-\frac{3}{5}$.

故选：B

4．C

【分析】由图象分析函数的周期，求得ω的值.

【详解】因为$f\left(0\right)=\sqrt{2}$，$f\left(2\pi\right)=-\sqrt{2}$，由图象可知，函数的半周期是$2\pi$，

所以$\frac{\pi}{\omega}=2\pi$，得$\omega=\frac{1}{2}$.

故选：C

5．D

【分析】利用三角函数的周期公式及二倍角的余弦公式,结合函数的奇偶性的定义及诱导公式即可求解.

【详解】对于A，$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，由题意可知，$y=\sin 4x$的定义域为$\mathrm{R}$，

$f\left(-x\right)=\sin 4\left(-x\right)=-\sin 4x=-f\left(x\right)$，所以$y=\sin 4x$为奇函数，故A错误；

对于 B，$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故 B 错误；

对于 C，$T=\frac{\pi}{\omega}=\frac{\pi}{4}$，故 C 错误；

对于 D，$y=\sin^2 2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x$，$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，由题意可知，$y=\sin^2 2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x$的定义域为$\mathrm{R}$，$f\left(-x\right)=\sin^2 2\left(-x\right)=\sin^2 2x=f\left(x\right)$，所以$y=\sin^2 2x$为偶函数，故 D 正确.

故选：D.

6．B

【分析】

利用三角函数的定义及同角三角函数的商数关系即可求解.

【详解】因为角α的终边在直线$y=2x$上，

所以$\tan\alpha=2$.

所以$\frac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{3\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{3\sin\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\tan\alpha+2}{3\tan\alpha-1}=\frac{2+2}{3\times 2-1}=\frac{4}{5}$.

故选：B.

7．A

【分析】首先根据三角函数的变换规则求出$g\left(x\right)$的解析式，再根据正弦函数的性质计算可得.

【详解】将函数$f\left(x\right)=2\sin x$的图像先向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得到$y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，

再将$y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$保持纵坐标不变，图像上所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍，得到

$g\left(x\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

令$2x+\frac{\pi}{6}=k\pi$，$k\in\mathrm{Z}$，解得$x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathrm{Z}$，

所以函数的对称中心为$\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},0\right)$，$k\in\mathrm{Z}$，故符合题意的有$\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$.

故选：A

8．C

【分析】先确定函数的周期，再假设函数的解析式，进而结合待定系数法可求函数的解析式，注意秒针是顺时针走动.

【详解】解：由题意，函数的周期为$T=60$，$\therefore \omega=\frac{2\pi}{60}=\frac{\pi}{30}$

设函数解析式为$y=\sin(-\frac{\pi}{30}t+\varphi)$（因为秒针是顺时针走动），

$\because$初始位置为$P_0(\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{1}{2})$，

$\therefore t=0$时，$y=\frac{1}{2}$，

$\therefore \sin\varphi=\frac{1}{2}$，

$\therefore \varphi$可取$\frac{\pi}{6}$，

$\therefore$函数解析式为$y=\sin(-\frac{\pi}{30}t+\frac{\pi}{6})$

故选：C．

9．-4

【分析】利用向量垂直的条件及数量积的坐标运算即可求解.

【详解】因为$\vec{a}=(-2,-3)$，$\vec{b}=(6,m)$，且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，

所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-2)\times 6+(-3)\times m=0$，解得$m=-4$.

故答案为：-4.

10．$\frac{2\pi}{5}$

【解析】由已知结合弧长公式即可直接求解.

【详解】由弧长公式可得$l=\alpha r=\frac{\pi}{5}\times 2=\frac{2\pi}{5}$.

故答案为：$\frac{2\pi}{5}$

【点睛】本小题主要考查弧长公式，属于基础题.

11．$\sqrt{3}$

【分析】根据题意得到$\tan\alpha+\tan\beta=-3\sqrt{3},\tan\alpha\tan\beta=4$，结合$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$，即可求解.

【详解】由题意知$\tan\alpha,\tan\beta$是方程$x^2+3\sqrt{3}x+4=0$的两根，

可得$\tan\alpha+\tan\beta=-3\sqrt{3},\tan\alpha\tan\beta=4$，

所以$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-3\sqrt{3}}{1-4}=\sqrt{3}$.

故答案为：$\sqrt{3}$.

12．$2\sqrt{3}$

【分析】首先根据数量积的定义求出$\vec{a}\cdot\vec{b}$，再根据$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2}$及数量积的运算律计算可得.

【详解】因为向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为60°，且$\left|\vec{a}\right|=2$，$\left|\vec{b}\right|=4$，

所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos 60^\circ=2\times4\times\dfrac{1}{2}=4$，

所以$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2}=\sqrt{\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}=\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2}$

$=\sqrt{2^2-2\times4+4^2}=2\sqrt{3}$.

故答案为：$2\sqrt{3}$

13．π（答案不唯一，只要是$(2k+1)\pi$即可）

【分析】先根据函数的对称性得到$c=0$，再根据诱导公式求出$m=(2k+1)\pi$都可满足条件.

【详解】函数$f(x)=\sin x$中心对称点都在 x 轴上，所以$c=0$，

所以$f(x)+f(x+m)=0$对任意$x\in\mathbf{R}$恒成立，

$f(x)+f(x+m)=\sin x+\sin(x+m)=0$，

所以$\sin x=-\sin(x+m)$，故利用诱导公式得$m=(2k+1)\pi$都可满足条件.

故答案为：π（答案不唯一，只要是$(2k+1)\pi$即可）

【点睛】正弦函数的奇偶性，对称性，周期性，单调性及诱导公式等等是我们必备的基础知识，做题时经常用到.

14．□□□

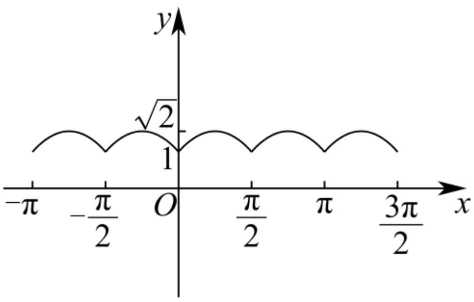
【分析】首先把三角函数变形成$f(x)=\sqrt{1+\left|\sin 2x\right|}$的形式，进而逐一分析三个结论的真假，可得答案.

【详解】∵函数$f(x)=\left|\sin x\right|+\left|\cos x\right|=\sqrt{1+\left|\sin 2x\right|}$，

则$f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sqrt{1+\left|\sin 2\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right|}=\sqrt{1+\left|\sin\left(2x+\pi\right)\right|}=\sqrt{1+\left|\sin 2x\right|}=f\left(x\right)$，

且 $f(x)=\begin{cases}\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}), 2k\pi\le x<2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z\\ \sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4}), 2k\pi+\frac{\pi}{2}\le x<2k\pi+\pi, k\in Z\\ -\sin x-\cos x=-\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}), 2k\pi+\pi\le x<2k\pi+\frac{3\pi}{2}, k\in Z\\ \cos x-\sin x=-\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4}), 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\le x<2k\pi+2\pi, k\in Z\end{cases}$,

函数图象如下所示：



所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$，故□正确；

故当 $\sin 2x=0$ 时，函数的最小值为 1，故□正确；

当 $\sin 2x=\pm 1$ 时，函数取最大值 $\sqrt{2}$，故□正确；

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$2x\in(0,\pi)$，因为 $y=\sin x$ 在 $(0,\pi)$ 上不单调，故函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上不单调，故□错误；

故答案为：□□□

15．$\frac{3}{5}$/0.6

【分析】先根据三角函数定义求得 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，再使用诱导公式进行求解.

【详解】根据三角函数定义可得：$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，由诱导公式得：$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha=\frac{3}{5}$.

故答案为：$\frac{3}{5}$

16．　　0　　$-\frac{1}{2}$/-0.5

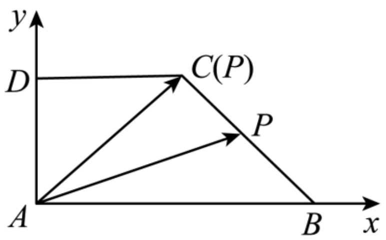
【分析】（1）建立平面直角坐标系，利用向量数量积的坐标表示，即可求解；

（2）根据 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，设出点 P 的坐标，利用数量积的坐标表示，转化为二次函数求最值.

【详解】（1）如图，以点 A 为原点，建立平面直角坐标系，当点 P 与点 C 重合时，

$A(0,0)$，$P(1,1)$，$C(1,1)$，$B(2,0)$，

$\overrightarrow{AP}=(1,1)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,1)$，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AP}=1\times(-1)+1\times1=0$；



（2）由（1）可知，$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，设 $P(2-y,y)$，$0\le y\le1$，

$\overrightarrow{AP}=(2-y,y)$，$\overrightarrow{BP}=(-y,y)$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(2-y)\cdot(-y)+y^2=2y^2-2y=2\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$，

当 $y=\frac{1}{2}$ 时，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$ 的最小值是 $-\frac{1}{2}$.

故答案为：0；$-\frac{1}{2}$.

17.　　3　　$m\ge\frac{1}{3}$

【分析】由φ的终边上的点可求出φ的值，再由题可得$T=\frac{2\pi}{3}$，即可求出ω，可得 $f(x)$ 解析式；根据 $x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 可得 $f(x)$ 的范围，不等式化为 $m\ge1-\frac{2}{2+f(x)}$，求出 $1-\frac{2}{2+f(x)}$ 的最大值即可.

【详解】角φ的终边经过点 $P(1,-\sqrt{3})$，所以 $\tan\varphi=-\sqrt{3}$，

又 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$，

因为当 $|f(x_1)-f(x_2)|=4$ 时，$|x_1-x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$，

所以 $T=\frac{2\pi}{3}$，即 $\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{3}$，所以 $\omega=3$，

可得 $f(x)=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$，

当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 时，$3x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$，$\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right]$，

所以 $-\sqrt{3}\le f(x)\le1$，所以 $2+f(x)>0$，

于是 $mf\left(x\right)+2m\geq f\left(x\right)$ 即为 $m\geq\frac{f\left(x\right)}{2+f\left(x\right)}=1-\frac{2}{2+f\left(x\right)}$，

由 $-\sqrt{3}\leq f\left(x\right)\leq1$，$2-\sqrt{3}\leq2+f\left(x\right)\leq3$，$\frac{2}{3}\leq\frac{2}{2+f\left(x\right)}\leq\frac{2}{2-\sqrt{3}}=4+2\sqrt{3}$，

所以 $-3-2\sqrt{3}\leq1-\frac{2}{2+f\left(x\right)}\leq\frac{1}{3}$，

得 $1-\frac{2}{2+f\left(x\right)}$ 的最大值为 $\frac{1}{3}$，

所以实数 m 的取值范围是 $m\geq\frac{1}{3}$.

故答案为：3；$m\geq\frac{1}{3}$.

18．□□

【分析】首先通过 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,\pi\right]$ 上有且仅有 4 条对称轴，求出 ω 的范围，再依次对各项进行辨析即可.

【详解】□ $f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)\left(\omega>0\right)$，

□当 $x\in\left[0,\pi\right]$ 时，$\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\omega\pi+\frac{\pi}{4}\right]$，

□正弦函数 $y=\sin x$ 的对称轴为直线 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

□当 $k=0$，1，2，3，4 时，$y=\sin x$ 的对称轴分别为直线 $x=\frac{\pi}{2}$，$x=\frac{3\pi}{2}$，$x=\frac{5\pi}{2}$，$x=\frac{7\pi}{2}$，$x=\frac{9\pi}{2}$，

□若函数 $f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)\left(\omega>0\right)$ 在区间 $\left[0,\pi\right]$ 上有且仅有 4 条对称轴，

则 $\begin{cases}\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}\\ \frac{7\pi}{2}\leq\omega\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{9\pi}{2}\end{cases}$，解得 $\omega\in\left[\frac{13}{4},\frac{17}{4}\right)$，故□正确；

对于□，当 $x\in\left(0,\pi\right)$ 时，$\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\omega\pi+\frac{\pi}{4}\right)$，

□ $\omega\in\left[\frac{13}{4},\frac{17}{4}\right)$，□ $\omega\pi+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{7\pi}{2},\frac{9\pi}{2}\right)$，

□正弦函数 $y=\sin x$ 的对称中心为点 $\left(k\pi,0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，

□当 $k=1$，2，3，4 时，$y=\sin x$ 的对称中心分别为点 $\left(\pi,0\right)$，$\left(2\pi,0\right)$，$\left(3\pi,0\right)$，$\left(4\pi,0\right)$，

□当 $\omega\pi+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{7\pi}{2},4\pi\right)$，即 $\omega\in\left[\frac{13}{4},\frac{15}{4}\right)$ 时，$f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$ 有且仅有 3 个对称中心，

当$\omega\pi+\frac{\pi}{4}\in\left[4\pi,\frac{9\pi}{2}\right)$，即$\omega\in\left[\frac{15}{4},\frac{17}{4}\right)$时，$f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$有且仅有4个对称中心，故□错误；

对于□，若$f\left(x\right)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}$，则$\omega=4\in\left[\frac{13}{4},\frac{17}{4}\right)$，故□正确；

对于□，当$x\in\left(0,\frac{\pi}{15}\right)$时，$\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\omega\pi}{15}+\frac{\pi}{4}\right)$，

又□$\omega\in\left[\frac{13}{4},\frac{17}{4}\right)$，□$\frac{\omega\pi}{15}+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{7\pi}{15},\frac{8\pi}{15}\right)$，

□正弦函数$y=\sin x$在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，在区间$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$上单调递减，

□当$\frac{\omega\pi}{15}+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{7\pi}{15},\frac{\pi}{2}\right]$，即$\omega\in\left[\frac{13}{4},\frac{15}{4}\right]$时，$f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{15}\right)$上单调递增，

当$\frac{\omega\pi}{15}+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{8\pi}{15}\right)$，即$\omega\in\left(\frac{15}{4},\frac{17}{4}\right)$时，$f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{15}\right)$上不单调，故□错误.

故答案为：□□.

【点睛】方法点睛：本题ω的取值并不是一个特定的值，而是一个范围，故应首先由已知条件解决ω的取值范围，判断□，再由ω的取值范围，使用整体代换思想，对其他项进行辨析.

19．(1)$m=2$；$\sin\alpha=\frac{4}{5}$；$\tan\alpha=-\frac{4}{3}$.

(2)$\cos2\alpha=-\frac{7}{25}$；$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

【分析】（1）利用余弦函数在各象限的符号及三角函数的定义即可求解；

（2）根据（1）的结论及二倍角的余弦公式，利用两角和的正弦公式及三角函数的特殊值即可求解.

【详解】（1）因为角α的终边过点$P\left(-3m,8\right)$，且$\cos\alpha=-\frac{3}{5}<0$，

所以α是第二象限角，且$m>0$.

所以$\cos\alpha=\frac{-3m}{\sqrt{\left(-3m\right)^2+8^2}}=-\frac{3}{5}$，解得$m=2$或$m=-2$（舍）.

所以$x=-6,y=8,r=\left|OP\right|=\sqrt{\left(-6\right)^2+8^2}=10$，

所以$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{8}{-6}=-\frac{4}{3}$.

（2）由（1）知，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，又因为$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，

所以$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\left(-\frac{3}{5}\right)^2-1=-\frac{7}{25}$，

$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

20．(1)最小正周期为π；单调递减区间$\left[\frac{5\pi}{12}+k\pi,\frac{11\pi}{12}+k\pi\right]$，$k\in Z$；

(2)$0<\omega<\frac{1}{2}$

【分析】(1）首先化简函数$f\left(x\right)$，再结合三角函数的性质，即可求解；

（2）首先根据（1）的结果求$2\omega x-\frac{\pi}{3}$在区间$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$的范围，根据函数无零点，求$\omega$的取值范围.

【详解】(1）$f\left(x\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，

则函数的最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，

令$\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{3}\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，

得$\frac{5\pi}{12}+k\pi\le x\le\frac{11\pi}{12}+k\pi$，$k\in Z$，

所以函数的单调递减区间是$\left[\frac{5\pi}{12}+k\pi,\frac{11\pi}{12}+k\pi\right]$，$k\in Z$；

（2）$y=f\left(\omega x\right)=2\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{3}\right),\left(\omega>0\right)$，

当$x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$时，$2\omega x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\omega\cdot\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right]$因为函数在$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$上无零点，

所以$-\frac{\pi}{3}<\omega\cdot\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}<0$，解得：$0<\omega<\frac{1}{2}$.

21．(1)□□□，$f\left(x\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

(2)$\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$

【分析】(1）先分析□□□成立时的情况，然后推出矛盾即可确定出满足的三个条件；

（2）先根据（1）求解出$f\left(x\right)$的解析式，然后采用整体替换的方法求解出$f\left(x\right)$的对称轴方

程，然后对k进行赋值，确定出在区间$\left[0,m\right]$上仅有一条对称轴时m的取值范围.

【详解】(1）三个条件是：□□□，理由如下：

若满足□：因为$y=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，所以$A=\sqrt{2}$，$\omega=1$；

若满足□：因为$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，所以$T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\pi$，所以$\omega=2$，

若满足□：$A=2$，

由此可知：若满足□，则□□均不满足，

所以满足的三个条件是：□□□；

由□□知$f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\varphi\right)$，

由□知$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$，所以$2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=1$，所以$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=\frac{1}{2}$，

所以$\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{6},k\in Z$或$\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\frac{5\pi}{6},k\in Z$，

所以$\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{6},k\in Z$或$\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in \mathbf{Z}$，又因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，

所以$\varphi=-\frac{\pi}{6}$，所以$f\left(x\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，

（2）由（1）可知$f\left(x\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，

不妨令$2x-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$，所以$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3},k\in Z$，

当$k=-1$时，$x=-\frac{\pi}{6}$；当$k=0$时，$x=\frac{\pi}{3}$；当$k=1$时，$x=\frac{5\pi}{6}$，

所以若要$y=f(x)$的对称轴只有一条落在区间$\left[0,m\right]$上，只需$m\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$，

所以m的取值范围是$\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$.

22．(1)最大值2，最小值$-\sqrt{3}$.

(2)$\left[\sqrt{3},2\right)$

【分析】(1）使用二倍角公式（降幂公式）和辅助角公式化简$f\left(x\right)$，再结合正弦函数性质求解；

（2）将问题转化为函数图象与直线$y=k$有两个不同的交点解决即可.

【详解】(1）由已知，$f\left(x\right)=2\sin x\cos x+2\sqrt{3}\cos^2 x-\sqrt{3}=\sin 2x+\sqrt{3}\left(2\cos^2 x-1\right)$

$=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

当$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$，

□当$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即$x=\frac{\pi}{12}$时，$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1$，$f\left(x\right)$有最大值$2$，

当$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$，即$x=\frac{\pi}{2}$时，$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$f\left(x\right)$有最小值$-\sqrt{3}$.

□$f\left(x\right)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值为$2$，最小值为$-\sqrt{3}$.

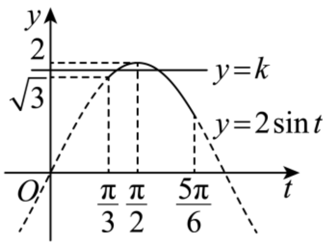
（2）由第（1）问，$g\left(x\right)=f\left(x\right)-k=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-k$，

$g\left(x\right)$在$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上有两个不同的零点，即方程$2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-k=0$在$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上有两个不相等的实数解，

令$2x+\frac{\pi}{3}=t$，□$x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，□$t\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$，

□方程$2\sin t-k=0$即$2\sin t=k$，在$t\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$上有两个不相等的实数解，

□函数$y=2\sin t$的图象与直线$y=k$在$t\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$上有两个交点，如图所示.



□实数k的取值范围是$\left[\sqrt{3},2\right)$.

23．(1)$-\frac{\sqrt{10}}{10}$

(2)-3或$\sqrt{3}$

【分析】（1）首先求出$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{BA}$的坐标，再坐标法求出数量积与模，即可得解；

（2）首先求出$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$、$\left|\overrightarrow{AB}\right|$，则$f\left(x\right)=-\sin^2 x+\left(2m+1\right)\sin x+2+m^2$，再令$t=\sin x$，$t\in\left[0,1\right]$，令$g\left(t\right)=-t^2+\left(2m+1\right)t+2+m^2$，结合二次函数的性质得到方程，解得即可.

【详解】（1）因为$A\left(3,0\right)$，$B\left(0,3\right)$，所以$\overrightarrow{OA}=\left(3,0\right)$，$\overrightarrow{OB}=\left(0,3\right)$，$\overrightarrow{BA}=\left(3,-3\right)$，

又$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$，所以$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}(3,0)+\frac{2}{3}(0,3)=(1,2)$，

所以$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{OC}=3\times1+2\times(-3)=-3$，$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{3^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$，

所以$\cos\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{OC}\rangle=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{OC}|}=\frac{-3}{\sqrt{5}\times3\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

（2）因为$\overrightarrow{OA}=(1,\cos x)$，$\overrightarrow{OB}=(1+\sin x,\cos x)$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

所以$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}(1,\cos x)+\frac{2}{3}(1+\sin x,\cos x)=\left(1+\frac{2}{3}\sin x,\cos x\right)$,

$\overrightarrow{AB}=(\sin x,0)$,

故$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=1+\frac{2}{3}\sin x+\cos^2 x$，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\sin^2 x}=\sin x$,

从而 $f(x)=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\left(2m+\frac{1}{3}\right)|\overrightarrow{AB}|+m^2$

$=1+\frac{2}{3}\sin x+\cos^2 x+\left(2m+\frac{1}{3}\right)\sin x+m^2$

$=1+\cos^2 x+(2m+1)\sin x+m^2$

$=-\sin^2 x+(2m+1)\sin x+2+m^2$,

即 $f(x)=-\sin^2 x+(2m+1)\sin x+2+m^2$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

依题意 $f(x)_{\min}=5$,

令$t=\sin x$，$t\in[0,1]$，令$g(t)=-t^2+(2m+1)t+2+m^2$，$t\in[0,1]$,

则$g(t)$对称轴为$t=\frac{2m+1}{2}$,

□当$\frac{2m+1}{2}\le\frac{1}{2}$，即$m\le0$时，当$t=\sin x=1$时，$g(t)_{\min}=m^2+2m+2$,

由 $f(x)_{\min}=5$，得$g(t)_{\min}=m^2+2m+2=5$，解得$m=-3$或$m=1$，又$m\le0$,

所以$m=-3$;

□当$\frac{2m+1}{2}>\frac{1}{2}$，即$m>0$时，当$t=\sin x=0$时，$g(t)_{\min}=2+m^2$,

由 $f(x)_{\min}=5$，得$g(t)_{\min}=2+m^2=5$，解得$m=\pm\sqrt{3}$，又$m>0$，所以$m=\sqrt{3}$.

综上所述：m的值为-3或$\sqrt{3}$.

24．(1)具有性质$P\left(\frac{1}{2}\right)$，理由见解析

(2)$\left(\frac{5\pi}{8},+\infty\right)$

(3)证明见解析

【分析】(1)由题可得 $x_0^2=\left(x_0+\frac{1}{2}\right)^2$，则 $x_0=-\frac{1}{4}$，结合条件即得；

(2)由 $\sin x_0=\sin\left(x_0+\frac{\pi}{4}\right)$，解得 $x_0=k\pi+\frac{3\pi}{8}$，$x_0+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{5\pi}{8}\in(0,n)(k\in\mathrm{N})$，可得 $n>\frac{5\pi}{8}$，即得；

(3)设 $g(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{3}\right)$，$x\in\left[0,\frac{5}{3}\right]$，可得 $g(0)+g\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+g\left(\frac{k-1}{3}\right)+\cdots+g\left(\frac{5}{3}\right)=f(2)-f(0)=0$，当 $g(0)$、$g\left(\frac{1}{3}\right)$、$\cdots$、$g\left(\frac{k-1}{3}\right)$、$\cdots$、$g\left(\frac{5}{3}\right)$ 中有一个为 0 时，可得 $f\left(\frac{i-1}{3}\right)=f\left(\frac{i-1}{3}+\frac{1}{3}\right)$，$i\in\{1,2,3,\cdots,6\}$，即证；当 $g(0)$、$g\left(\frac{1}{3}\right)$、$\cdots$、$g\left(\frac{n-1}{3}\right)$、$\cdots$、$g\left(\frac{5}{3}\right)$ 中均不为 0 时，由于其和为 0，则其中必存在正数和负数，不妨设 $g\left(\frac{i-1}{3}\right)>0$，$g\left(\frac{j-1}{3}\right)<0$，结合条件可知，存在 x_0，$g(x_0)=f(x_0)-f\left(x_0+\frac{1}{3}\right)=0$，即证.

【详解】(1)函数 $f(x)=x^2$ 在 $[-1,1]$ 上具有性质 $P\left(\frac{1}{2}\right)$.

若 $x_0^2=\left(x_0+\frac{1}{2}\right)^2$，则 $x_0=-\frac{1}{4}$，

因为 $-\frac{1}{4}\in[-1,1]$，且 $-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\in[-1,1]$，

所以函数 $f(x)=x^2$ 在 $[-1,1]$ 上具有性质 $P\left(\frac{1}{2}\right)$.

(2)解法 1：由题意，存在 $x_0\in(0,n)$，使得 $\sin x_0=\sin\left(x_0+\frac{\pi}{4}\right)$，

得 $x_0+\frac{\pi}{4}=x_0+2k\pi$（舍）或 $x_0+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-x_0\ (k\in\mathbf{Z})$，

则得 $x_0=k\pi+\frac{3\pi}{8}$.

因为 $x_0=k\pi+\frac{3\pi}{8}>0$，所以 $k\in\mathbf{N}$.

又因为 $x_0=k\pi+\frac{3\pi}{8}\in(0,n)$ 且 $x_0+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{5\pi}{8}\in(0,n)(k\in\mathbf{N})$，

所以 $n>\frac{5\pi}{8}$，即所求 n 的取值范围是 $\left(\frac{5\pi}{8},+\infty\right)$.

解法 2：当$0<n\le\dfrac{\pi}{2}$时，函数$f(x)=\sin x$，$x\in(0,n)$是增函数，

所以不符合题意；

当$n>\dfrac{\pi}{2}$时，因为直线$x=\dfrac{\pi}{2}$是函数$f(x)=\sin x$的一条对称轴，

而函数$f(x)=\sin x$在区间$(0,n)(n>0)$上具有性质$P\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，

所以$2\left(n-\dfrac{\pi}{2}\right)>\dfrac{\pi}{4}$，

解得$n>\dfrac{5\pi}{8}$，即所求n的取值范围是$\left(\dfrac{5\pi}{8},+\infty\right)$.

（3）设$g(x)=f(x)-f\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$，$x\in\left[0,\dfrac{5}{3}\right]$.

则有$g(0)=f(0)-f\left(\dfrac{1}{3}\right)$，$g\left(\dfrac{1}{3}\right)=f\left(\dfrac{1}{3}\right)-f\left(\dfrac{2}{3}\right)$，$g\left(\dfrac{2}{3}\right)=f\left(\dfrac{2}{3}\right)-f(1)$，$\cdots$，

$g\left(\dfrac{k-1}{3}\right)=f\left(\dfrac{k-1}{3}\right)-f\left(\dfrac{k}{3}\right)$，$\cdots$，$g\left(\dfrac{5}{3}\right)=f\left(\dfrac{5}{3}\right)-f(2)\ (k\in\{1,2,3,\cdots,6\})$.

以上各式相加得$g(0)+g\left(\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+g\left(\dfrac{k-1}{3}\right)+\cdots+g\left(\dfrac{5}{3}\right)=f(2)-f(0)$

即$g(0)+g\left(\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+g\left(\dfrac{k-1}{3}\right)+\cdots+g\left(\dfrac{5}{3}\right)=0$，

（i）当$g(0)$、$g\left(\dfrac{1}{3}\right)$、$\cdots$、$g\left(\dfrac{k-1}{3}\right)$、$\cdots$、$g\left(\dfrac{5}{3}\right)$中有一个为 0 时，不妨设$g\left(\dfrac{i-1}{3}\right)=0$，

$i\in\{1,2,3,\cdots,6\}$，即$g\left(\dfrac{i-1}{3}\right)=f\left(\dfrac{i-1}{3}\right)-f\left(\dfrac{i}{3}\right)=0$，即$f\left(\dfrac{i-1}{3}\right)=f\left(\dfrac{i-1}{3}+\dfrac{1}{3}\right)$，$i\in\{1,2,3,\cdots,6\}$，

所以函数$y=f(x)$在区间$[0,2]$上具有性质$P\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

（ii）当$g(0)$、$g\left(\dfrac{1}{3}\right)$、$\cdots$、$g\left(\dfrac{n-1}{3}\right)$、$\cdots$、$g\left(\dfrac{5}{3}\right)$中均不为 0 时，由于其和为 0，

则其中必存在正数和负数，不妨设$g\left(\dfrac{i-1}{3}\right)>0$，$g\left(\dfrac{j-1}{3}\right)<0$，

其中$i\ne j$，i、$j\in\{1,2,3,\cdots,6\}$.

由于函数$y=g(x)$的图像是连续不断的曲线，所以当$i<j$时，至少存在一个实数

$x_0\in\left(\dfrac{i-1}{3},\dfrac{j-1}{3}\right)$（当$i>j$时，至少存在一个实数$x_0\in\left(\dfrac{j-1}{3},\dfrac{i-1}{3}\right)$），其中$i$、$j\in\{1,2,3,\cdots,6\}$，

使得$g(x_0)=0$，即$g(x_0)=f(x_0)-f\left(x_0+\dfrac{1}{3}\right)=0$，

即存在x_0，使得$f(x_0)=f\left(x_0+\dfrac{1}{3}\right)$，

所以函数$y=f(x)$在区间$[0,2]$上也具有性质$P\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

综上，函数 $y=f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,2\right]$ 上具有性质 $P\left(\dfrac{1}{3}\right)$.