**北师大二附中**2026届高一（下）期中数学试题

一、单选题（每题4分，共**40**分）

1.$sin150°$的值为(    )

A. $−\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $−\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}$

2.已知$\vec{a}=(−2,4)$，$\vec{b}=(1,1)$，则$\vec{a}⋅(\vec{a}−\vec{b})=$(    )

A. $6$ B. $−6$ C. $18$ D. $−18$

3.若角$α$的终边过点$(3,1)$，则$sin(α+\frac{π}{2})=$(    )

A. $\frac{3\sqrt[ ]{10}}{10}$ B. $−\frac{3\sqrt[ ]{10}}{10}$ C. $\frac{\sqrt[ ]{10}}{10}$ D. $−\frac{\sqrt[ ]{10}}{10}$

4.在$△ABC$中，“$\vec{AB}⋅\vec{BC}<0$”是“$△ABC$为锐角三角形”的(    )

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

5.将$y=sin2x$的图象向左平移$\frac{π}{6}$个单位，则平移后的图象所对应的函数的解析式为(    )

A. $y=sin(2x+\frac{π}{6})$ B. $y=sin(2x−\frac{π}{6})$ C. $y=sin(2x+\frac{π}{3})$ D. $y=sin(2x−\frac{π}{3})$

6.如图，$A$，$B$两点在河的两岸，在$B$同侧的河岸边选取点$C$，测得$BC$的距离$10m$，$∠ABC=75°$，$∠ACB=60°$，则$A$，$B$两点间的距离为(    )

A. $5\sqrt[ ]{2}m$ B. $5\sqrt[ ]{3}m$
C. $5\sqrt[ ]{5}m$ D. $5\sqrt[ ]{6}m$

7.如图，正方形$ABCD$的边长为$2$，$E$为$BC$的中点，

$\vec{DF}=2\vec{FC}$，则$\vec{AE}⋅\vec{BF}$的值为(    )
A. $\frac{2}{3}$ B. $−\frac{2}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $−\frac{4}{3}$

8.函数$f(x)=cos2x−cosx$的最大值是(    )

A. $−\frac{9}{8}$ B. $0$ C. $2$ D. $3$

9.函数$y=cosx|tanx|(0\leq x<\frac{3π}{2}$且$x\ne \frac{π}{2})$的图象是下图中的(    )

A.  B. 
C.  D. 

10.已知$O$，$A$，$B$，$C$，$D$在同一平面内，$|OA|=|OB|=|OC|=|OD|=1$，且$\vec{OA}⋅\vec{OB}=0$，则$|\vec{AC}+\vec{BD}|$的最大值为(    )

A. $2\sqrt[ ]{2}$ B. $2+\sqrt[ ]{2}$ C. $1+\sqrt[ ]{2}$ D. $4$

二、填空题（每题5分，共**25**分）

11.已知$\vec{a}=(−3,2)$，$\vec{b}=(1,x)$，若$\vec{a}⊥\vec{b}$，则实数$x$的值为\_\_\_\_\_\_．

12.已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$在正方形网格中的位置如图所示，

则$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角的余弦为          ．
13.若$α\in (0,\frac{π}{2}),cos(α+\frac{π}{3})=−\frac{4}{5}$，则$sinα=$ \_\_\_\_\_\_．

14.已知函数$f(x)=Asin(ωx+φ)(A>0,ω>0,0<φ<π)$在一个周期内的图象如图所示，则函数$f(x)$的解析式为\_\_\_\_\_\_．

1. 将函数$f(x)=2sin\left(3x+φ\right)\left(\left|φ\right|\leq \frac{π}{2}\right)$的图象向右平移$\frac{2π}{9}$个单位长度，得到的函数$g(x)$的图象关于点$\left(−\frac{11}{18}π,0\right)$对称，且$g(x)$在区间$\left(\frac{φ}{m},−\frac{φ}{m}\right)$上单调递增，则$φ=$\_\_\_\_\_\_\_\_\_，实数$m$的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

三、解答题（共**6**小题，共**85**分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

16.$($本小题$12$分$)$
已知向量$\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(x,4)$，$\vec{c}=(4,−x)$，且$\vec{a}⊥\vec{c}$；
$(1)$求$x$的值；
$(2)$若$|\vec{a}+k\vec{c}|=5$，求$k$的值．

17.$($本小题$14$分$)$
如图，在平面直角坐标系$xOy$中，点$A$为单位圆与$x$轴正半轴的交点，点$P$为单位圆上的一点，且$∠AOP=\frac{π}{4}$，点$P$沿单位圆按逆时针方向旋转角$θ$后到点$Q(a,b)$．
$(1)$当$θ=\frac{π}{6}$时，求$ab$的值：
$(2)$设$θ\in [\frac{π}{4},\frac{π}{2}]$，求$b−a$的取值范围．

18.$($本小题$14$分$)$

已知梯形$ABCD$，$AD⊥AB$，$AB//DC$，点$E$在边$BC$上，且$BE=2EC$，$AB=5$，

$AD=3$，$CD=2$．

$(1)$求$\vec{AC}⋅\vec{DB}$的值；

$(2)$求$\vec{AE}$与$\vec{AC}$夹角的余弦值

19.$($本小题$15$分$)$
已知函数$f(x)=2sinxcosx+2cos^{2}x−1$．

$($Ⅰ$)$求$f(−\frac{π}{4})$的值；

$($Ⅱ$)$求$f(x)$的最小正周期；

$($Ⅲ$)$求$f(x)$在区间$[0,\frac{π}{2}]$上的最大值和最小值，并求出对应$x$的值．

20.$($本小题$15$分$)$
设函数$f(x)=4sin\frac{ωx}{2}cos(\frac{ωx}{2}−\frac{π}{3})+m(ω>0,m\in R).$在下列条件$①$、条件$②$、条件$③$这三个条件中选择两个作为已知，使得$f(x)$存在．
条件$①$：$f(−x)=f(x)$；
条件$②$：$f(x)$的最小正周期为$π$；
条件$③$：$f(x)$的最大值与最小值之和为$0$．
$(1)$求函数$f(x)$的解析式；
$(2)$若函数$f(x)$在区间$[0,a]$上是增函数，求实数$a$的最大值．
注：若选择的条件不符合要求，得$0$分；若选择多组条件分别解答，按第一组解答计分．

21.$($本小题$15$分$)$
已知定义域为$R$的函数$ℎ(x)$满足：对于任意的$x\in R$，都有$ℎ(x+2π)=ℎ(x)+ℎ(2π)$，则称函数$ℎ(x)$具有性质$P$．
$($Ⅰ$)$判断函数$f(x)=2x$，$g(x)=cosx$是否具有性质$P$，请说明理由；
$($Ⅱ$)$已知函数$f(x)=sin(ωx+φ)(\frac{3}{2}<ω<\frac{5}{2},|φ|<\frac{π}{2})$，判断是否存在$ω$，$φ$，使函数$f(x)$具有性质$P$？若存在，求出$ω$，$φ$的值；若不存在，说明理由；
$($Ⅲ$)$设函数$f(x)$具有性质$P$，且在区间$[0,2π]$上的值域为$[f(0),f(2π)].$函数$g(x)=sin(f(x))$，满足$g(x+2π)=g(x)$，且在区间$(0,2π)$上有且只有一个零点$.$

求证：$f(2π)=2π$．

**参考答案及评分标准**

一、选择题

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| B | C | A | B | C | D | A | C | C | B |

二、填空题

11. $\frac{3}{2}$  12. $\frac{3}{5}$  13. $\frac{3+4\sqrt[ ]{3}}{10}$  14. $f(x)=2sin(\frac{1}{2}x+\frac{π}{4})$  15. $\frac{π}{2}$；$(−\infty ,−\frac{9}{2}]$

三、解答题

16.解：$(1)$因为向量$\vec{a}=(1,2)$，$\vec{c}=(4,−x)$，$\vec{a}⊥\vec{c}$，

所以$\vec{a}⋅\vec{c}=1×4−2x=0$，
解得$x=2$， …………………………4分

$(2)$由$(1)$知，$\vec{a}=(1,2)$，$\vec{c}=(4,−2)$，
所以$\vec{a}^{2}=5$，$\vec{c}^{2}=20$，$\vec{a}⋅\vec{c}=1×4+2×(−2)=0$，
所以$|\vec{a}+k\vec{c}|^{2}=\vec{a}^{2}+2k\vec{a}⋅\vec{c}+k^{2}\vec{c}^{2}=5+20k^{2}=25$，
即$k^{2}=1$，
解得$k=\pm 1$，
所以$k$的值为$\pm 1$．  …………………………12分

17.解：$(1)$由题意可得$P(cos\frac{π}{4},sin\frac{π}{4})$即为$(\frac{\sqrt[ ]{2}}{2},\frac{\sqrt[ ]{2}}{2})$，
$a=cos(\frac{π}{4}+\frac{π}{6})=cos\frac{5π}{12}$，$b=sin\frac{5π}{12}$，
可得$ab=sin\frac{5π}{12}cos\frac{5π}{12}=\frac{1}{2}sin\frac{5π}{6}=\frac{1}{4}$； …………………………6分
$(2)$由题意可得$a=cos(\frac{π}{4}+θ)$，$b=sin(\frac{π}{4}+θ)$，
即有$b−a=sin(\frac{π}{4}+θ)−cos(\frac{π}{4}+θ)=\sqrt[ ]{2}sinθ$，
由$θ\in [\frac{π}{4},\frac{π}{2}]$，可得$sinθ\in [\frac{\sqrt[ ]{2}}{2},1]$，
则$b−a$的范围是$[1,\sqrt[ ]{2}].$  …………………………14分

18. $(1)$解：$\vec{AC}=\vec{AD}+\vec{DC},\vec{DB}=\vec{AB}−\vec{AD}$，所以$\vec{AC}⋅\vec{DB}=\left(\vec{AD}+\vec{DC}\right)⋅\left(\vec{AB}−\vec{AD}\right)$

$=\vec{AD}⋅\vec{AB}−\vec{AD}^{2}+\vec{DC}⋅\vec{AB}−\vec{DC}⋅\vec{AD}$，
因为$AD⊥AB$，$AB//DC$，

所以$\vec{AD}⋅\vec{AB}=0$，$\vec{AD}^{2}=9$，$\vec{DC}⋅\vec{AB}=2×5=10$，$\vec{DC}⋅\vec{AD}=0$，

则$\vec{AD}⋅\vec{AB}−\vec{AD}^{2}+\vec{DC}⋅\vec{AB}−\vec{DC}⋅\vec{AD}=0−9+10−0=1$，即$\vec{AC}⋅\vec{DB}=1$．

 …………………………6分

$(2)$解：以$A$为原点，以$AB$所在直线为$x$轴，以$AD$所在直线为$y$轴建立平面直角坐标系，

则$A\left(0,0\right),B\left(5,0\right),C\left(2,3\right),D\left(0,3\right)$，

设$E\left(x,y\right)$，因为$BE=2EC$，

所以$\vec{CE}=\frac{1}{3}\vec{CB}$，即$\left(x−2,y−3\right)=\frac{1}{3}\left(3,−3\right)$，

则$x=3,y=2$，所以$E\left(3,2\right)$，

则$\vec{AE}=\left(3,2\right),\vec{AC}=\left(2,3\right)$，

从而$\left|\vec{AE}\right|=\sqrt[ ]{9+4}=\sqrt[ ]{13},\left|\vec{AC}\right|=\sqrt[ ]{9+4}=\sqrt[ ]{13}$，

$cos\left⟨\vec{AE},\vec{AC}\right⟩=\frac{\vec{AE}⋅\vec{AC}}{\left|\vec{AE}\right|\left|\vec{AC}\right|}=\frac{6+6}{13}=\frac{12}{13}$． …………………………14分
19.解：$($Ⅰ$)f(−\frac{π}{4})=2sin\left(−\frac{π}{4}\right)cos\left(−\frac{π}{4}\right)+2cos^{2}\left(−\frac{π}{4}\right)−1$
$=2×\left(−\frac{\sqrt[ ]{2}}{2}\right)×\frac{\sqrt[ ]{2}}{2}+2×\left(\frac{\sqrt[ ]{2}}{2}\right)^{2}−1=−1$．
$∴f(−\frac{π}{4})$的值为$−1$． …………………………4分
$($Ⅱ$)f(x)=2sinxcosx+2cos^{2}x−1=sin2x+cos2x=\sqrt[ ]{2}sin(2x+\frac{π}{4})$，
所以函数$f(x)$的最小正周期为$T=\frac{2π}{2}=π$． …………………………9分
$($Ⅲ$)∵0⩽x⩽\frac{π}{2}$，$∴\frac{π}{4}⩽2x+\frac{π}{4}⩽\frac{5π}{4}$，
$∴−\frac{\sqrt[ ]{2}}{2}⩽sin(2x+\frac{π}{4})⩽1$，故$−1⩽\sqrt[ ]{2}sin(2x+\frac{π}{4})⩽\sqrt[ ]{2}$，
当$2x+\frac{π}{4}=\frac{π}{2}$，即$x=\frac{π}{8}$时，$f(x)$有最大值$\sqrt[ ]{2}$，
当$2x+\frac{π}{4}=\frac{5π}{4}$，即$x=\frac{π}{2}$时，$f(x)$有最小值$−1$．  …………………………15分

20.解：$(1)$由$f(x)=4sin\frac{ωx}{2}(\frac{1}{2}cos\frac{ωx}{2}+\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}sin\frac{ωx}{2})+m$
$=2sin\frac{ωx}{2}cos\frac{ωx}{2}+2\sqrt[ ]{3}sin^{2}\frac{ωx}{2}+m$
$$=sinωx+\sqrt[ ]{3}(1−cosωx)+m$$

$=sinωx−\sqrt[ ]{3}cosωx+\sqrt[ ]{3}+m=2sin(ωx−\frac{π}{3})+\sqrt[ ]{3}+m$，
若选条件$①$，由$f(−x)=f(x)$，可得函数$f(x)$为偶函数，
即$2sin(−ωx−\frac{π}{3})+\sqrt[ ]{3}+m=2sin(ωx−\frac{π}{3})+\sqrt[ ]{3}+m$恒成立，
即$−sin(ωx+\frac{π}{3})=sin(ωx−\frac{π}{3})$，即$sinωx=0$恒成立，
因为对$x\in R$，$sinωx=0$不能恒成立，所以条件$①$不成立，
选择条件$②③$：
由条件$②$，可得$T=\frac{2π}{|ω|}=π$，因为$ω>0$，所以$ω=2$．
由条件$③$，可得$f(x)=2sin(ωx−\frac{π}{3})+\sqrt[ ]{3}+m$，
可得$f(x)\_{max}=2+\sqrt[ ]{3}+m,f(x)\_{min}=−2+\sqrt[ ]{3}+m$，
所以$(2+\sqrt[ ]{3}+m)+(−2+\sqrt[ ]{3}+m)=0$，解得$m=−\sqrt[ ]{3}$，所以$f(x)=2sin(2x−\frac{π}{3})$．

 …………………………8分
$(2)$解：由函数$f(x)=2sin(2x−\frac{π}{3})$，
令$−\frac{π}{2}+2kπ\leq 2x−\frac{π}{3}\leq \frac{π}{2}+2kπ(k\in Z)$，解得所以$−\frac{π}{12}+kπ\leq x\leq \frac{5π}{12}+kπ  (k\in Z)$，
所以函数$f(x)$的单调增区间为$[−\frac{π}{12}+kπ,\frac{5π}{12}+kπ] (k\in Z)$．
因为函数$f(x)$在$[0,a]$上单调递增，且$0\in [−\frac{π}{12},\frac{5π}{12}]$，此时$k=0$，
所以$a\leq \frac{5π}{12}$，故实数$a$的最大值为$\frac{5π}{12}$．  …………………………15分

21.解：$($Ⅰ$)$因为$f(x)=2x$，则$f(x+2π)=2(x+2π)=2x+4π$，
又$f(2π)=4π$，所以$f(x+2π)=f(x)+f(2π)$，
故函数$f(x)=2x$具有性质$P$；
因为$g(x)=cosx$，则$g(x+2π)=cos(x+2π)=cosx$，
又$g(2π)=cos2π=1$，$g(x)+g(2π)=cosx+1+g(x+2π)$，
故$g(x)=cosx$不具有性质$P$； …………………………4分
$($Ⅱ$)$若函数$f(x)$具有性质$P$，则$f(0+2π)=f(0)+f(2π)$，
即$f(0)=sinφ=0$，
因为$|φ|<\frac{π}{2}$，所以$φ=0$，
所以$f(x)=sin(ωx)$；
若$f(2π)\ne 0$，不妨设$f(2π)>0$，
由$f(x+2π)=f(x)+f(2 π)$，得$f(2kπ)=f(0)+kf(2π)=kf(2π)(k\in Z) (∗)$，
只要$k$充分大时，$kf(2π)$将大于$1$，
而$f(x)$的值域为$[−1,1]$，
故等式$(∗)$不可能成立，
所以必有$f(2π)=0$成立，即$sin(2ωπ)=0$，
因为$\frac{3}{2}<ω<\frac{5}{2}$，
所以$3π<2ωπ<5π$，
所以$2ωπ=4π$，则$ω=2$，
此时$f(x)=sin2x$，
则$f(x+2π)=sin2(x+2π)=sin2x$，
而$f(x)+f(2π)=sin2x+sin4π=sin2x$，
即有$f(x+2π)=f(x)+f(2π)$成立，
所以存在$ω=2$，$φ=0$，使函数$f(x)$具有性质$P$． …………………………9分

$($Ⅲ$)$证明：由函数$f(x)$具有性质$P$及$($Ⅱ$)$可知，$f(0)=0$，
由$g(x+2π)=g(x)$可知函数$g(x)$是以$2π$为周期的周期函数，
则$g(2π)=g(0)$，即$sin(f(2π))=sin(f(0))=0$，
所以$f(2 π )=kπ$，$k\in Z$；
由$f(0)=0$，$f(2π)=kπ$以及题设可知，函数$f(x)$在$[0,2π]$的值域为$[0,kπ]$，
所以$k\in Z$且$k>0$；
当$k>2$，$f(x)=π$及$f(x)=2π$时，均有$g(x)=sin(f(x))=0$，
这与$g(x)$在区间$(0,2π)$上有且只有一个零点矛盾，因此$k=1$或$k=2$；
当$k=1$时，$f(2π)=π$，函数$f(x)$在$[0,2π]$的值域为$[0,π]$，
此时函数$g(x)$的值域为$[0,1]$，
而$f(x+2π)=f(x)+π$，
于是函数$f(x)$在$[2π,4π]$的值域为$[π,2π]$，
此时函数$g(x)$的值域为$[−1,0]$，函数$g(x)=sin(f(x))$在当$x\in [0,2π]$时和$x\in [2π,4π]$时的取值范围不同，
与函数$g(x)$是以$2π$为周期的周期函数矛盾，
故$k=2$，即$f(2π)=2π$．  …………………………15