# 高一年级书院课程第四讲

1．已知$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4}{5}$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则$\cos\alpha=$_________..

2．（1）$4\sin 80^\circ-\frac{\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}=$_____.

（2）若$\frac{\pi}{4}<\beta<\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，且$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{2}}{10}$，$\sin 2\beta=\frac{4}{5}$，则$\alpha-\beta=$_____.

3．在$\triangle ABC$中，已知$b$=2，$A$=30°，且该三角形有唯一解，则$a$取值范围_____

4．在$\triangle ABC$中，内角A，B，$C$所对的边分别为$a$，$b$，$c$，已知$c=2a\sin C-2c\cos A$，则$\sin 2A$=_____；若$a=2$，则$\triangle ABC$面积的最大值为_____.

5．已知偶函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$的图像关于点$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$中心对称，且在区间$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上单调，则$\omega=$_____.

6．已知角$\alpha,\beta$的终边关于直线$y=x$对称，且$\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$，则$\alpha,\beta$的一组取值可以是$\alpha=$\_\_\_\_\_，$\beta=$_____.

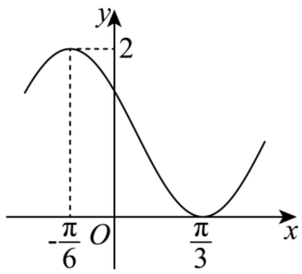
7．已知函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)+B$（其中 $A>0,\omega>0,\left|\varphi\right|<\pi$）的部分图象如图所示，有以下结论：

□ $f\left(x\right)\geq f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$

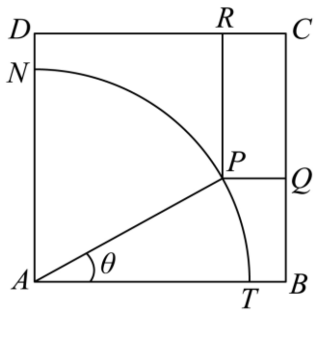
□ $f\left(x\right)+f\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=2$

□ $f\left(x\right)$ 在 $\left[\dfrac{4\pi}{3},2\pi\right]$ 上单调递增

所有正确结论的序号是_____.




8．如图所示，$ABCD$ 是一块边长为 8 米的荒地，小花想在其中开垦出一块地来种植玫瑰花.已知一半径为 6 米的扇形区域 $TAN$ 已被小明提前撒下了蔬菜种子，扇形区域外能供小花随意种植玫瑰花.最后小花决定在能种植玫瑰的区域选定一块矩形 $PQCR$ 区域进行种植，其中 $R$ 在 $DC$ 边上，$Q$ 在 $BC$ 边上，$P$ 是弧 $TN$ 上一点.设 $\angle TAP=\theta$，矩形 $PQCR$ 的面积为S平方米.则S的最大值为_____.



**参考答案：**

1．$\dfrac{4\sqrt{3}-3}{10}$

【分析】先利用正弦函数的性质判断得$\alpha+\dfrac{\pi}{3}$的取值范围，从而求得$\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$，再利用余弦函数的和差公式即可得解.

【详解】因为$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则$\dfrac{\pi}{3}<\alpha+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{5\pi}{6}$，

因为$\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{4}{5}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以$\dfrac{2\pi}{3}<\alpha+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{5\pi}{6}$，

所以$\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)}=-\dfrac{3}{5}$，

则$\cos\alpha=\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\dfrac{\pi}{3}+\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\dfrac{\pi}{3}$

$=-\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{5}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{4\sqrt{3}-3}{10}$.

故答案为：$\dfrac{4\sqrt{3}-3}{10}$.

2．　$-\sqrt{3}$　　$\dfrac{3\pi}{4}$

【分析】(1) 通分，利用倍角公式以及利用$\cos10^\circ=\cos(30^\circ-20^\circ)$展开化简计算即可；

(2) 先通过角的范围求出$\sin(\alpha+\beta)$，$\cos2\beta$，再利用$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha+\beta-2\beta)$展开计算即可.

【详解】(1) $4\sin80^\circ-\dfrac{\cos10^\circ}{\sin10^\circ}=\dfrac{4\cos10^\circ\sin10^\circ-\cos10^\circ}{\sin10^\circ}=\dfrac{2\sin20^\circ-\cos(30^\circ-20^\circ)}{\sin10^\circ}$

$=\dfrac{2\sin20^\circ-(\cos30^\circ\cos20^\circ+\sin30^\circ\sin20^\circ)}{\sin10^\circ}$

$=\dfrac{\frac{3}{2}\sin20^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos20^\circ}{\sin10^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}\sin(20^\circ-30)}{\sin10^\circ}=\dfrac{-\sqrt{3}\sin10^\circ}{\sin10^\circ}=-\sqrt{3}$；

(2) 因为$\dfrac{\pi}{4}<\beta<\pi$，所以$\dfrac{\pi}{2}<2\beta<2\pi$，

又$\sin2\beta=\dfrac{4}{5}>0$，所以$\dfrac{\pi}{2}<2\beta<\pi$，则$\cos2\beta=-\sqrt{1-\sin^2 2\beta}=-\dfrac{3}{5}$，

因为$\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{4}<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，所以$\dfrac{5\pi}{4}<\alpha+\beta<2\pi$，

又$\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$，所以$\dfrac{5\pi}{4}<\alpha+\beta<\dfrac{3\pi}{2}$，

所以$\sin\left(\alpha+\beta\right)=-\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha+\beta\right)}=-\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$，

因为$\dfrac{5\pi}{4}<\alpha+\beta<\dfrac{3\pi}{2}$，$-\pi<-2\beta<-\dfrac{\pi}{2}$，

所以$\dfrac{\pi}{4}<\alpha-\beta<\pi$，

所以$\cos\left(\alpha-\beta\right)=\cos\left(\alpha+\beta-2\beta\right)=\cos\left(\alpha+\beta\right)\cos 2\beta+\sin\left(\alpha+\beta\right)\sin 2\beta$

$=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)-\dfrac{7\sqrt{2}}{10}\times\dfrac{4}{5}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以$\alpha-\beta=\dfrac{3\pi}{4}$.

3．$\{1\}\bigcup[2,+\infty)$

【分析】利用正弦定理得出$a$与$\sin B$的关系式，再根据三角形有唯一解，可得$B$只有一个值，根据正弦函数的图象与性质得到$B$的范围，且当$B$为直角时，也满足题意，进而可得出$a$的取值范围.

【详解】$\because$在$\triangle ABC$中，$b=2$，$A=30°$，

$\therefore$由正弦定理得$\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{2\times\frac{1}{2}}{a}=\dfrac{1}{a}$，$\because A=30°$，$\therefore 0<B<150°$，

要使三角形有唯一解，得到$0<B\le 30°$，即$0<\sin B\le\dfrac{1}{2}$，

$\therefore 0<\dfrac{1}{a}\le\dfrac{1}{2}$，解得$a\ge 2$，

又$B=90°$时，三角形也只有一解，

此时$a=1$，$\therefore$的取值范围为$\{1\}\bigcup[2,+\infty)$.

故答案为：$\{1\}\bigcup[2,+\infty)$.

4．　$\dfrac{3}{4}$　　$\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}$

【分析】先由正弦定理化边为角整理得到$\sin A-\cos A=\dfrac{1}{2}$，两边平方即得$\sin 2A$的值；再利用同角的三角函数基本关系式求得$\sin A,\cos A$的值，利用余弦定理和基本不等式求得$bc$的最大值，从而得到$\triangle ABC$面积的最大值.

【详解】因为$c=2a\sin C-2c\cos A$，由正弦定理得$\sin C=2\sin A\sin C-2\sin C\cos A$，

因为$C\in\left(0,\pi\right),\therefore\sin C\ne 0$，则有$\sin A-\cos A=\dfrac{1}{2}$，

所以$(\sin A-\cos A)^2=\frac{1}{4}$，得$1-2\sin A\cos A=\frac{1}{4}$，即$2\sin A\cos A=\frac{3}{4}$，故$\sin 2A=\frac{3}{4}$；

因$2\sin A\cos A=\frac{3}{4}$，$A\in(0,\pi)$，故$A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，可得$\sin A>0,\cos A>0$，

由$\begin{cases}\sin A-\cos A=\frac{1}{2}\\ \sin^2 A+\cos^2 A=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}\sin A=\frac{1+\sqrt{7}}{4}\\ \cos A=\frac{\sqrt{7}-1}{4}\end{cases}$，得$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\frac{1+\sqrt{7}}{4}bc$，

由余弦定理得，$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sqrt{7}-1}{4}$，所以$b^2+c^2=4+\frac{\sqrt{7}-1}{2}bc$，

由$b^2+c^2=4+\frac{\sqrt{7}-1}{2}bc\geq 2bc$，当且仅当$b=c$时等号成立，可得$bc\leq\frac{8}{5-\sqrt{7}}=\frac{4}{9}(5+\sqrt{7})$，

$S_{\triangle ABC}\leq\frac{1}{2}\times\frac{1+\sqrt{7}}{4}\times\frac{4}{9}(5+\sqrt{7})=\frac{2+\sqrt{7}}{3}$，即$\triangle ABC$面积的最大值为$\frac{2+\sqrt{7}}{3}$.

故答案为：$\frac{3}{4}$；$\frac{2+\sqrt{7}}{3}$.

5．$\frac{3}{2}$/1.5

【分析】根据题意$\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，再由对称中心求出$\omega=3k+\frac{3}{2},k\in\mathrm{Z}$，最后根据函数单调性确定$\omega$.

【详解】因为偶函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$，所以$\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathrm{Z}$，

即$f(x)=\cos\omega x$或$f(x)=-\cos\omega x$，

又$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$的图像关于点$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$中心对称，

所以$\cos\frac{\pi}{3}\omega=0$，即$\frac{\pi}{3}\omega=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathrm{Z}$，

所以$\omega=3k+\frac{3}{2},k\in\mathrm{Z}$，

因为$x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$函数单调，所以$0\leq\omega x\leq\frac{\pi\omega}{4}\leq\frac{\pi}{2}$，即$0<\omega\leq 2$，

所以当$k=0$时，$\omega=\frac{3}{2}$符合条件.

故答案为：$\frac{3}{2}$

6．$\frac{\pi}{3}$（答案不唯一，符合题意即可） $\frac{\pi}{6}$（答案不唯一，符合题意即可）

【分析】由角$\alpha,\beta$的终边关于直线$y=x$对称，可得$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，再由$\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$可得$\beta=\frac{\pi}{6}+k\pi$或$\beta=-\frac{\pi}{6}+k\pi$，即可求出答案.

【详解】因为角$\alpha,\beta$的终边关于直线$y=x$对称，

则$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，则$\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\beta+2k\pi$，

因为$\sin\left(\alpha-\beta\right)=\dfrac{1}{2}$，所以$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta+2k\pi-\beta\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2\beta+2k\pi\right)=\cos 2\beta=\dfrac{1}{2}$，

所有$2\beta=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$或$2\beta=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$，$k\in Z$，

解得：$\beta=\dfrac{\pi}{6}+k\pi$或$\beta=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi$，$k\in Z$，

取$k=0$，$\beta$的一个值可以为$\dfrac{\pi}{6}$，$\alpha$的一个值可以为$\dfrac{\pi}{3}$.

故答案为：$\dfrac{\pi}{3}$（答案不唯一，符合题意即可）；$\dfrac{\pi}{6}$（答案不唯一，符合题意即可）.

7．□

【分析】借助图象可得$f\left(x\right)$解析式，结合正弦函数的单调性、最值、奇偶性等逐项判断即可得.

【详解】由图可得$A=\dfrac{2+0}{2}=1$，$B=\dfrac{2-0}{2}=1$，且$\omega>0$，则$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\times\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\pi$，即$\omega=2$，

$\dfrac{\pi}{3}\times 2+\varphi=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即$\varphi=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

又$|\varphi|<\pi$，故$\varphi=\dfrac{5\pi}{6}$，即$f\left(x\right)=\sin\left(2x+\dfrac{5}{6}\pi\right)+1$，

对□：$2\times\dfrac{5\pi}{6}+\dfrac{5\pi}{6}=\dfrac{5}{2}\pi=2\pi+\dfrac{\pi}{2}$，由$x=\dfrac{\pi}{2}$时，函数$y=\sin x$取最大值，

故$f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$是函数$f\left(x\right)$的最大值，故□错误；

对□：$f\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2x+\dfrac{5}{6}\pi\right)+1=\sin\left(-2x+\dfrac{7}{6}\pi\right)+1=-\sin\left(2x+\dfrac{5}{6}\pi\right)+1$，

则$f\left(x\right)+f\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=\sin\left(2x+\dfrac{5}{6}\pi\right)+1-\sin\left(2x+\dfrac{5}{6}\pi\right)+1=2$，故□正确；

对□：当$x\in\left[\dfrac{4\pi}{3},2\pi\right]$时，$2x+\dfrac{5\pi}{6}\in\left[\dfrac{7\pi}{2},\dfrac{29\pi}{6}\right]=\left[4\pi-\dfrac{\pi}{2},4\pi+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right]$，

由函数$y=\sin x$在$\left[4\pi-\dfrac{\pi}{2},4\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递增，

故函数$f\left(x\right)$在$\left[\dfrac{4\pi}{3},2\pi\right]$上不单调，故□错误.

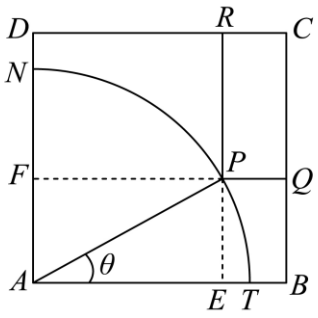
故正确结论的序号是：□.

故答案为：□.

8．16

【分析】利用三角函数分别表示出$PR,PQ$，从而得到S关于$\theta$的表达式，再利用换元法与同角关系式进一步得到S关于$t$的表达式，结合二次函数的性质即可得解.

【详解】如图，延长$RP$交$AB$于点$E$，延长$QP$交$AD$于点$F$，




由四边形$ABCD$是正方形，四边形$PQCR$是矩形，

可知$PE \perp AB, PF \perp AD$，又$\angle TAP = \theta, AP = 6$，

所以$EP = 6\sin\theta, FP = 6\cos\theta, \therefore PR = 8 - 6\sin\theta, PQ = 8 - 6\cos\theta$，

则$S = PR \cdot PQ = \left(8 - 6\sin\theta\right)\left(8 - 6\cos\theta\right) = 64 - 48\left(\sin\theta + \cos\theta\right) + 36\sin\theta\cos\theta$，$0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$.

令$\sin\theta + \cos\theta = t$，由$0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$，可得$\theta + \dfrac{\pi}{4} \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$，

故$t = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) \in \left[1, \sqrt{2}\right]$，

$t^2 = (\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$，即$\sin\theta\cos\theta = \dfrac{t^2 - 1}{2}$，

则$S = 64 - 48t + 36 \times \dfrac{t^2 - 1}{2} = 18t^2 - 48t + 46, t \in \left[1, \sqrt{2}\right]$，其开口向上，对称轴为$t = \dfrac{4}{3}$，

因为$\dfrac{4}{3} - 1 > \sqrt{2} - \dfrac{4}{3}$，

所以当$t = 1$时，S取最大值，最大值为$18 - 48 + 46 = 16$.

故答案为：16.