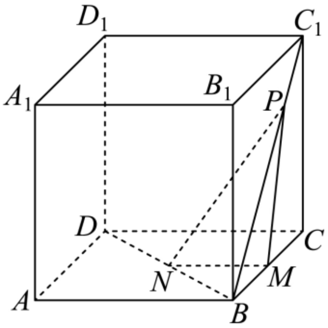
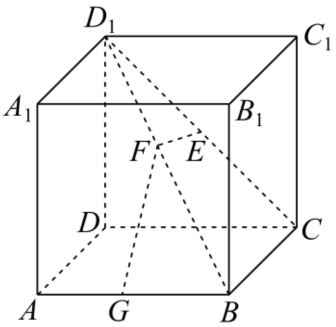
书院课程第六讲

一、填空题

1．如图，在棱长为 4 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 P 是 BC_1 上靠近 C_1 的四等分点，点 M、N 分别在 BC、BD 上，则 $\triangle PMN$ 周长的最小值为________.



2．如图，棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D$ 中，E 为 CD_1 的中点，F 为对角线 BD_1 上的动点，G 为棱 AB 上的动点，则 $EF+FG$ 的最小值为_____.

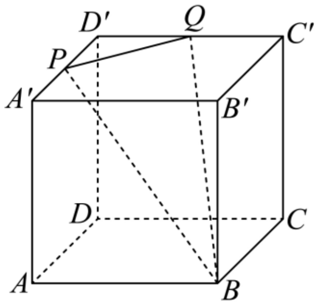


3．在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$|AB|=2$，$|A_1B_1|=1$，且该正四棱台的每个顶点均在表面积为 8π 的球 O 上，则平面 BCC_1B_1 截球 O 所得截面的面积为_____.

4．已知 A,B,C 是球 O 的球面上的三点，$AB=2,AC=2\sqrt{3},\angle ABC=60^\circ$，且三棱锥 $O-ABC$ 的体积为 $\frac{4\sqrt{6}}{3}$，则球 O 的体积为_____.

5．将 4 个半径为 $\sqrt{6}$ 的球堆放在一起，且两两相切，记与这 4 个球都内切的大球的半径为 R，记与这 4 个球都外切的小球的半径为 r，则 $\frac{R}{r}=$________.

6．如图，在棱长为$2a$的正方体$ABCD-A'B'C'D'$中，P,Q分别为$A'D',C'D'$的中点，过P,Q,B三点的截面将正方体分为两部分，则这两部分几何体的体积比（小于 1）为________.



7．已知圆锥的底面半径为$2\sqrt{3}$，高为 2，S为顶点，A，B为底面圆周上的两个动点，则下列说法正确的是_____.

□圆锥的体积为8π；

□圆锥侧面展开图的圆心角大小为$\sqrt{3}\pi$；

□圆锥截面SAB面积的最大值为$4\sqrt{3}$；

□若圆锥的顶点和底面上的所有点都在一个球面上，则此球的体积为$\frac{256}{3}\pi$.

8．若四面体$ABCD$的三组对棱分别相等，即$AB=CD$，$AC=BD$，$AD=BC$，给出下列结论：

□四面体$ABCD$每组对棱相互垂直；

□四面体$ABCD$每个面的面积相等；

□从四面体$ABCD$每个顶点出发的三条棱两两夹角之和大于90°而小于180°；

□连结四面体$ABCD$每组对棱中点的线段相互垂直平分；

□从四面体$ABCD$每个顶点出发的三条棱的长可作为一个三角形的三边长；

其中正确结论的序号是________.（写出所有正确结论的序号）

参考答案：

1．$3+3\sqrt{3}$

【分析】将$\triangle PBD,\triangle PBC$分别沿$BD,BC$展开到与平面$BCD$共面的位置，由此可得所求最小值为$P_1P_2$，利用余弦定理可求得结果.

【详解】将$\triangle PBD,\triangle PBC$分别沿$BD,BC$展开到与平面$BCD$共面的位置，如图所示，

其中点P_1,P_2为原来的点P,$\triangle PMN$的周长$P_1M+MN+NP_2\geq P_1P_2$，

（当且仅当P_1、M、N、P_2四点共线时取等号）.

$\because BP_1=BP_2=\dfrac{3}{4}BC_1=\dfrac{3}{4}\times\sqrt{16+16}=3\sqrt{2}$，

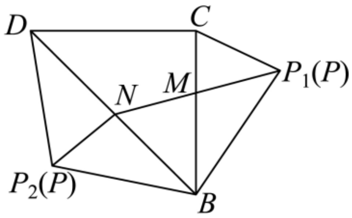
又$\angle P_2BP_1=\angle DBP+\angle CBP+\angle CBD=60^{\circ}+45^{\circ}+45^{\circ}=150^{\circ}$，

$\therefore P_1P_2^2=BP_2^2+BP_1^2-2BP_2\cdot BP_1\cos\angle P_2BP_1$

$=36-36\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=36+18\sqrt{3}=(3\sqrt{3}+3)^2$，

$\therefore P_1P_2=3+3\sqrt{3}$，即$\triangle PMN$周长的最小值为$3+3\sqrt{3}$.

故答案为：$3+3\sqrt{3}$.



2．$\dfrac{5\sqrt{2}}{6}$

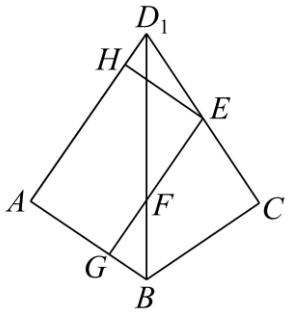
【分析】将三角形BCD_1和三角形BAD_1展开成平面图形，E点到直线AB的距离，也即$EF+FG$的最小值.

【详解】将三角形BCD_1和三角形BAD_1展开成平面图形如下图所示.过E作$EG\perp AB$，交BD_1于F，交AB于G，则EG是$EF+FG$的最小值.过E作$EH\perp AD_1$，交AD_1于H.三角形BCD_1和三角形BAD_1是全等的直角三角形.设$\angle CD_1B=\angle AD_1B=\alpha$，则$\cos\alpha=\dfrac{CD_1}{BD_1}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，所以

$\cos\angle AD_1E=\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\frac{1}{3}$.所以 $D_1H=D_1E\cdot\cos 2\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}}{6}$.所以

$EG=AH=AD_1-D_1H=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{6}=\frac{5\sqrt{2}}{6}$.

故答案为：$\frac{5\sqrt{2}}{6}$

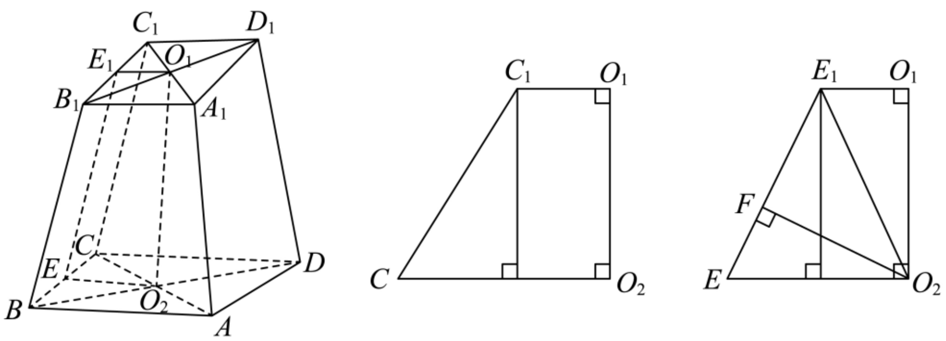


【点睛】本小题主要考查空间线段和的最小值的求法，考查空间想象能力，考查化归与转化的数学思想方法，考查数形结合的数学思想方法，属于中档题.

3．$\frac{8}{7}\pi$ / $\frac{8\pi}{7}$

【分析】先求出外接球的半径与球心位置；再做辅助线证明出 $O_2F\perp$平面 B_1BCC_1，在 $\triangle EO_2E_1$ 中，设 $|EF|=x,|O_2F|=d$，结合图象列出关于 x,d 的方程组，最后解出截面圆的半径即可.

【详解】



由球 O 的表面积为 8π，所以 $S=4\pi R^2=8\pi$，可知球 O 的半径为 $\sqrt{2}$，

设上下底面的中心分别为 O_1,O_2，因为 $|AB|=2$，

从而可知球 O 的球心与下底面 $ABCD$ 的中心 O_2 重合；

分别取 B_1C_1 和 BC 的中点 E_1、E，连接 $C_1O_1,EO_2,E_1E,E_1O_1,EO_2,O_1O_2$，

则在直角梯形 $C_1O_1O_2C$ 中得 $|O_1O_2|=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

则在直角梯形 $E_1O_1O_2E$ 中得 $|E_1E|=\frac{\sqrt{7}}{2}$，

过点O_2作E_1E的垂线，垂足为F，

由于$BC\perp$平面$E_1O_1O_2E$，　$O_2F\subset$平面$E_1O_1O_2E$，所以$BC\perp O_2F$，

由$OF_2\perp EE_1$，$EE_1\bigcap BC=E$，$EE_1,BC\subset$平面B_1BCC_1，从而$O_2F\perp$平面B_1BCC_1，

在$\triangle EO_2E_1$中，设$|EF|=x,|O_2F|=d$，

则$|E_1F|=\dfrac{\sqrt{7}}{2}-x$，则$x^2+d^2=1$，和$\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}-x\right)^2+d^2=\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$，

联立解得：$x=\dfrac{\sqrt{7}}{7},d^2=\dfrac{6}{7}$，

又因为平面B_1BCC_1截球所得平面图形为圆面，所以圆面的半径$r^2=\dfrac{8}{7}$，

所以圆面面积为$\pi r^2=\dfrac{8}{7}\pi$.

【点睛】方法点睛：构建方程组利用勾股定理解截面圆半径是解决立体几何的一种重要方法.

4．$32\sqrt{3}\pi$

【分析】判断$\triangle ABC$的形状并求出其外接圆的半径r，利用锥体的体积公式求出球心到截面ABC的距离，进而求出球半径即可求解.

【详解】在$\triangle ABC$中，$AB=2,AC=2\sqrt{3},\angle ABC=60^\circ$，由余弦定理得

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle ABC$，

即$12=4+BC^2-2BC$，整理得$BC^2-2BC-8=0$，而$BC>0$，解得$BC=4$，

显然$AC^2+AB^2=BC^2$，即$\angle BAC=90^\circ$，则$\triangle ABC$外接圆的半径$r=\dfrac{1}{2}BC=2$，

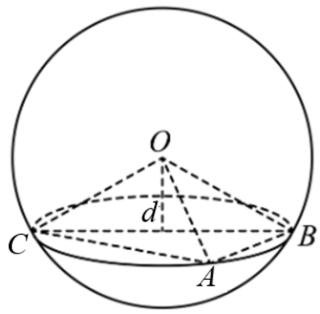
令球心O到平面ABC的距离为d，而$\triangle ABC$的面积为$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC=2\sqrt{3}$，

由棱锥$O-ABC$的体积为$\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$，得$\dfrac{1}{3}\times2\sqrt{3}\times d=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$，解得$d=2\sqrt{2}$，

球O的半径R，则有$R^2=r^2+d^2=12$，$R=2\sqrt{3}$，

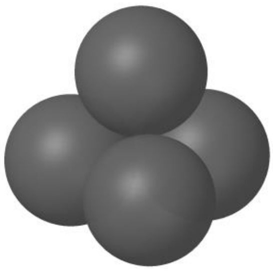
所以球O的体积$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi\cdot(2\sqrt{3})^3=32\sqrt{3}\pi$.

故答案为：$32\sqrt{3}\pi$



5．$5+2\sqrt{6}$

【分析】先用四个球的球心构成正四面体的顶点，再根据四面体中心到各顶点的距离为 3，分别表示四面体的内切球和外接球半径即可.

【详解】

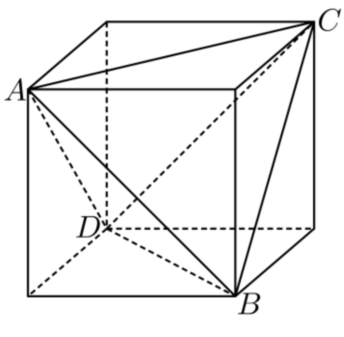
由球心 A，B，C，D 构成的四面体是正四面体，

将堆放在一起的四个球球心连在一起，形成一个棱长为$2\sqrt{6}$的正四面体，

此正四面体的中心即为题中与 4 球内切大球球心和与 4 球外切小球的球心，

将正四面体补形成一个正方体，正方体的棱长为$2\sqrt{3}$，正四面体的棱是正方体各面的对角线，

如图所示，



则正四面体的外接球的直径为正方体的体对角线长，即外接球的半径$R=3$，

四面体中心到各顶点的距离为 3，所以$R=3+\sqrt{6}$，$r=3-\sqrt{6}$，$\frac{R}{r}=5+2\sqrt{6}$

故答案为：$5+2\sqrt{6}$.

6．$\frac{25}{47}$

【分析】根据题意，作出完整的截面$BGQPH$，由$\triangle PA'E\cong\triangle PD'Q$，求得$A'E=a$，再由$AB//A'E$，得到$A'H=\dfrac{2}{3}a$，得到过点$B,P,Q$的截面上方的体积$V_1=V_{B-B'EF}-2V_{H-EPA'}$，进而求得另一部分的体积，即可求解.

【详解】如图所示，延长PQ与$A'B'$的延长线交于点E，与$B'C'$的延长线交于点F，连接BE,BF，

分别交AA',CC'于点H,G，由此作出完整的截面$BGQPH$，

因为正方体的棱长为$2a$，P,Q分别为$A'D',C'D'$的中点，所以$A'P=D'P=a$，

由$\triangle PA'E\cong\triangle PD'Q$，则$A'E=a$，

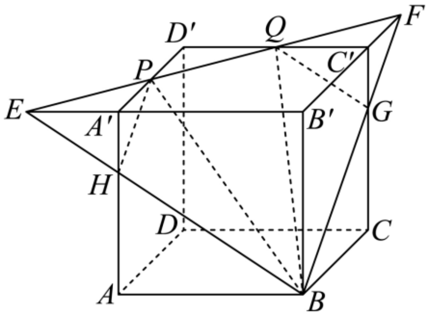
又因为$AB//A'E$，可得$\dfrac{A'H}{AH}=\dfrac{A'E}{AB}$，则$A'H=\dfrac{2}{3}a$，

则过点B,P,Q的截面上方的体积

$V_1=V_{B-B'EF}-2V_{H-EPA'}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle B'EF}\times BB'-2\times\dfrac{1}{3}S_{\triangle EPA'}\times A'H=\dfrac{25}{9}a^3$，

则另一部分体积为$V_2=(2a)^3-\dfrac{25}{9}a^3=\dfrac{47}{9}a^3$，所以$\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{25}{47}$.

故答案为：$\dfrac{25}{47}$.



7．□□□

【分析】根据题意求出圆锥的母线长，体积，侧面展开图的弧长，轴截面的面积，外接球体积，即可得出结论.

【详解】∵圆锥的底面半径$r=2\sqrt{3}$，高为$h=2$，

∴圆锥的母线长$SA=SB=\sqrt{r^2+h^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2}=4$，

∴圆锥的体积$V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi\times\left(2\sqrt{3}\right)^2\times2=8\pi$，□正确；

设圆锥侧面展开图的圆心角大小为α，则$2\pi\times2\sqrt{3}=\alpha\times4,\alpha=\sqrt{3}\pi$，□正确；

当圆锥截面SAB为圆锥的轴截面时，此时$SA=SB=4,AB=4\sqrt{3}$，

则 $\cos\angle ASB=\dfrac{SA^2+SB^2-AB^2}{2SA\cdot SB}=-\dfrac{1}{2}$，又 $\angle ASB\in(0,\pi)$，

$\therefore\angle ASB=\dfrac{2\pi}{3}$，

则当 $\angle ASB=\dfrac{\pi}{2}$ 时，圆锥截面 SAB 面积的最大，

此时 $S_{\triangle ASB}=\dfrac{1}{2}\cdot SA\cdot SA\cdot\sin\angle ASB=\dfrac{1}{2}\times4\times4\times1=8$，故□错误；

圆锥的顶点和底面上的所有点都在同一个球面上，即为圆锥的外接球，

设圆锥的外接球半径为 R，

由球的性质可知 $R^2=(h-R)^2+r^2$，即 $R^2=(2-R)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2$，

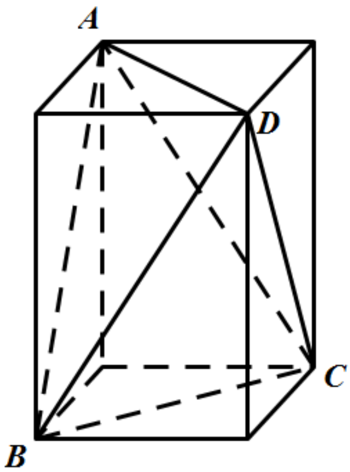
解得 $R=4$，

所以外接球体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi\times4^3=\dfrac{256\pi}{3}$，□正确.

故答案为：□□□.

8．　□□□

【详解】把四面体补形为平行六面体,由三组对棱分别相等可知此平行六面体为长方体,如图所示,只有长方体为正方体时□才正确,故□不正确.



在长方体中,有□BAC□□DCA.

□ABC□□DCB,□CBD□□ADB.

□四面体 ABCD 每个面的面积都相等,故□正确.

对于□,以□BAC,□CAD,□BAD 为例说明.

□□BAC□□DCA,□□CAD=□ACB.

又□□DAB□□CBA,

□□BAD=□ABC.

□□BAC+□CAD+□BAD=□BAC+□ACB+□ABC=180°,故□不正确.

对于□,连接四面体ABCD对棱中点的线段即是连接长方体对面中心的线段,显然相互垂直平分,故□正确.

对于□,以AB、AC、AD为例进行说明.

□AD=BC,AB、AC、BC三边长可构成□ABC,

□AB、AC、AD可以作为一个三角形的三边长.同理可得从其他顶点出发的三条棱的长也可以作为一个三角形的三边长.故□正确.