书院课程第五讲

1．已知$\triangle ABC$满足$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}>0$.给出下列四个结论：

①$\triangle ABC$为锐角三角形；②$\sin A<\cos B$；③$\overrightarrow{AB}^2>\overrightarrow{CB}^2+\overrightarrow{CA}^2$；④$\cos A\cos B>\sin A\sin B$.

其中所有正确结论的序号是__________.

2． $\triangle ABC$中，a，b，c分别是内角A、B、C的对边，已知$A=60^{\circ}$， $a=6$，现有以下判断：

①若$b=\sqrt{3}$，则B有两解；②b＋c不可能等于12；

③若$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=12$，则$\triangle ABC$的面积为$6\sqrt{3}$；④$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{BC}$的最大值为$24\sqrt{3}$.

请将所有正确的判断序号写在横线上______.

3．在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c， 已知$a=3,\sin B=\sin 2A$.

① $\dfrac{b}{\cos A}$的值为____；

② 若$a>c$，则b的取值范围是____.

4．在ΔABC中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，$c=4$，$a=4\sqrt{2}\sin A$，且C为锐角，则ΔABC面积的最大值为________.

5．若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}(a^2+c^2-b^2)$,且$\angle C$ 为钝角，则$\angle B$=__________；$\dfrac{c}{a}$ 的取值范围是__________.

6．对于三角形 ABC 形状的判断，以下说法正确的有：__________

①若 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{\cos B}{\cos A}$，则 $\triangle ABC$ 为等腰三角形；

②若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$，则 $\triangle ABC$ 为等边三角形.

③ $\sin A=\cos B$，则 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

④若 $\triangle ABC$ 平面内有一点 O 满足：$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，且 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|$，则 $\triangle ABC$ 为等边三角形

⑤若 $\sin^2 A+\sin^2 B+\cos^2 C<1$，则 $\triangle ABC$ 为钝角三角形.

7．阿基米德螺线广泛存在于自然界中，具有重要作用．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，螺线与坐标轴依次交于点 $A_1(-1,0)$，$A_2(0,-2)$，$A_3(3,0)$，$A_4(0,4)$，$A_5(-5,0)$，$A_6(0,-6)$，$A_7(7,0)$，$A_8(0,8)$，并按这样的规律继续下去．给出下列四个结论：

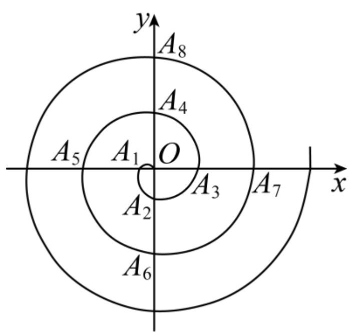
①对于任意正整数 n，$\left|A_nA_{n+4}\right|=4$；

②存在正整数 n，$\left|A_nA_{n+1}\right|$ 为整数；

③存在正整数 n，三角形 $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ 的面积为 2023；

④对于任意正整数 n，三角形 $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ 为锐角三角形.

其中所有正确结论的序号是__________.



参考答案：

1．②③④

【分析】根据平面向量数量积的定义，结合余弦定理、两角和的余弦公式、正弦型函数的单调性逐一判断即可.

【详解】由 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}>0\Rightarrow\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}<0\Rightarrow\left|\overrightarrow{CB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\cos C<0\Rightarrow\cos C<0\Rightarrow C\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，

所以 $\triangle ABC$ 是钝角三角形，因此①不正确；

因为 $C\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，所以 $A+B<\frac{\pi}{2}\Rightarrow A<\frac{\pi}{2}-B$，

因为 A,B 都是锐角，所以可得 $\sin A<\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\cos B$，因此②正确；

由 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0\Rightarrow a^2+b^2-c^2<0\Rightarrow\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{AC}^2<\overrightarrow{AB}^2$，

因此③正确；

由 $\cos C<0\Rightarrow\cos(\pi-A-B)<0\Rightarrow\cos(A+B)>0\Rightarrow\cos A\cos B-\sin A\sin B>0$

$\Rightarrow\cos A\cos B>\sin A\sin B$，因此④正确，

故答案为：②③④

【点睛】关键点睛：根据平面向量数量积的定义判断角 C 是钝角是解题的关键.

2．③④

【分析】利用正弦定理解三角形判断解的方法判断①；利用余弦定理计算 $b+c$ 判断②；利用数量积求出 bc，再求出面积判断③；利用向量数量积的运算律结合正弦定理及三角变换求解判断④作答.

【详解】对于①，在 $\triangle ABC$ 中，$b=\sqrt{3}<6=a$，则 $B<A=60^\circ$，角 B 为锐角，只有一解，①不正确；

对于②，由余弦定理得：$36=a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-3bc\geq(b+c)^2-3(\frac{b+c}{2})^2$

$=\frac{1}{4}(b+c)^2$，

当且仅当 $b=c$ 时取“=”，$b+c\leq 12$，因此，当 $b=c$ 时，$b+c$ 取最大值 12，②不正确；

对于③，$12=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=bc\cos A=\frac{1}{2}bc$，解得 $bc=24$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=6\sqrt{3}$，③正确；

对于④，由正弦定理得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=4\sqrt{3}$，$b=4\sqrt{3}\sin B,c=4\sqrt{3}\sin C$，$C=\frac{2\pi}{3}-B$，

$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2=b^2-c^2=48(\sin^2 B-\sin^2 C)$

$=48\left(\frac{1-\cos 2B}{2}-\frac{1-\cos 2C}{2}\right)=24\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}-2B\right)-\cos 2B\right]=-24\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2B+\frac{3}{2}\cos 2B\right)$

$=-24\sqrt{3}\sin\left(2B+\frac{\pi}{3}\right)$，而$0<B<\frac{2\pi}{3}$，即$0<2B+\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{3}$，当$2B+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$，即$B=\frac{7\pi}{12}$时，

$\sin\left(2B+\frac{\pi}{3}\right)=-1$，

所以$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{BC}$的最大值为$24\sqrt{3}$，④正确.

故答案为：③④

【点睛】思路点睛：涉及三角形中的最值问题，主要方法有两类，一是找到边之间的关系，利用基本不等式求最值，二是利用正弦定理，转化为关于某个角的函数，利用函数思想求最值..

3．　　6.　　$(3,3\sqrt{2})$.

【分析】①由正弦定理可得；②由 $b=6\cos A$ 及余弦定理可得$b^2=\frac{27-3c^2}{3-c}=9+3c$结合 c 的范围得 b 的不等式求解即可

【详解】①由$\sin B=\sin 2A$，得：$\sin B=2\sin A\cos A$，

由正弦定理得：$b=2a\cos A$，即$\frac{b}{\cos A}=2a=6$；

②由余弦定理，得：　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

由①得：$\cos A=\frac{b}{6}$，

所以，$3^2=b^2+c^2-\frac{b^2c}{3}$，

所以，$27=(3-c)b^2+3c^2$，

即：$b^2=\frac{27-3c^2}{3-c}=9+3c$，

因为$a>c$，所以，0＜c＜3，

$9<9+3c<18$

所以，$9<b^2<18$，即 3＜b＜$3\sqrt{2}$，

故答案为 6；　$(3,3\sqrt{2})$.

【点睛】本题考查了正弦定理、余弦定理，利用余弦定理得 b 与 c 的不等关系是关键，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.

4．$4+4\sqrt{2}$

【分析】由$c=4$，$a=4\sqrt{2}\sin A$，利用正弦定理求得$C=\dfrac{\pi}{4}$.，再由余弦定理可得$16=a^2+b^2-\sqrt{2}ab$，利用基本不等式可得$ab\le\dfrac{16}{2-\sqrt{2}}=8\left(2+\sqrt{2}\right)$，从而利用三角形面积公式可得结果.

【详解】因为$c=4$，又$\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}=4\sqrt{2}$，

所以$\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，又$C$为锐角，可得$C=\dfrac{\pi}{4}$.

因为$16=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-\sqrt{2}ab\ge\left(2-\sqrt{2}\right)ab$，

所以$ab\le\dfrac{16}{2-\sqrt{2}}=8\left(2+\sqrt{2}\right)$，

当且仅当$a=b=\sqrt{8\left(2+\sqrt{2}\right)}$时等号成立，

即$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{4}ab\le 4+4\sqrt{2}$，

即当$a=b=\sqrt{8\left(2+\sqrt{2}\right)}$时，$\Delta ABC$面积的最大值为$4+4\sqrt{2}$. 故答案为$4+4\sqrt{2}$.

【点睛】本题主要考查余弦定理、正弦定理以及基本不等式的应用，属于简单题. 对余弦定理一定要熟记两种形式：（1）$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$；（2）$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，同时还要熟练掌握运用两种形式的条件.另外，在解与三角形、三角函数有关的问题时，还需要记住$30^o,45^o,60^o$等特殊角的三角函数值，以便在解题中直接应用.

5．　60°　$(2,+\infty)$

【分析】根据题干结合三角形面积公式及余弦定理可得$\tan B=\sqrt{3}$，可求得$\angle B=\dfrac{\pi}{3}$；再利用$\sin C=\sin\left(A+B\right)$，将问题转化为求函数$f\left(A\right)$的取值范围问题.

【详解】$\because S_{\Delta ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(a^2+c^2-b^2\right)=\dfrac{1}{2}ac\sin B$，

$\therefore\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{\sin B}{\sqrt{3}}$，即$\cos B=\dfrac{\sin B}{\sqrt{3}}$，

$\therefore\dfrac{\sin B}{\cos B}=\sqrt{3},\angle B=\dfrac{\pi}{3}$，

则$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sin C}{\sin A}=\dfrac{\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)}{\sin A}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos A-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\sin A}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{1}{2}$，

$\therefore\angle C$为钝角，$\angle B=\dfrac{\pi}{3},\therefore 0<\angle A<\dfrac{\pi}{6}$，

$\therefore \tan A\in\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right),\dfrac{1}{\tan A}\in\left(\sqrt{3},+\infty\right)$，故$\dfrac{c}{a}\in\left(2,+\infty\right)$.

故答案为$\dfrac{\pi}{3}$，$\left(2,+\infty\right)$.

【点睛】此题考查解三角形的综合应用，能够根据题干给出的信息选用合适的余弦定理公式是解题的第一个关键；根据三角形内角$A+B+C=\pi$的隐含条件，结合诱导公式及正弦定理，将问题转化为求解含$\angle A$的表达式的最值问题是解题的第二个关键.

6．②④⑤

【分析】根据正弦定理边化角，可推得$A=B$或$A+B=\dfrac{\pi}{2}$，判断①；根据向量数量积的运算律可判断②；举反例可判断③；根据向量数量积的运算律结合向量的模可判断④；利用正弦定理角化边结合余弦定理可判断⑤.

【详解】对于①，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{\cos B}{\cos A}$，则$\dfrac{\sin A}{\sin B}=\dfrac{\cos B}{\cos A},\therefore \sin A\cos A=\sin B\cos B$,

即$\sin 2A=\sin 2B$，由于$A,B\in(0,\pi)$，则$2A,2B\in(0,2\pi)$，

则$2A=2B$或$2A+2B=\pi$，即$A=B$或$A+B=\dfrac{\pi}{2}$，

故$\triangle ABC$为等腰三角形或直角三角形，①错误；

对于②，由$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$可得$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{BC}=0$，

即$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=0$，故$\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2=0,\therefore|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}|$，

同理由$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$可得$|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AB}|$,

故$\triangle ABC$为等边三角形，②正确.

对于③，不妨取$A=\dfrac{2\pi}{3},B=C=\dfrac{\pi}{6}$,满足$\sin A=\cos B$，但$\triangle ABC$不是直角三角形．③错误；

对于④，因为$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，故$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2=|-\overrightarrow{OC}|^2$，

即$|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OC}|^2$,

又$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$，所以$|\overrightarrow{OA}|^2+2|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot\cos\angle AOB=0$，

故$\cos\angle AOB=-\dfrac{1}{2}$，由于$\angle AOB\in[0,\pi]$，故$\angle AOB=\dfrac{2\pi}{3}$，

同理可得$\angle AOC=\angle BOC=\dfrac{2\pi}{3}$，结合$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$，

故$\triangle AOB\cong\triangle AOC\cong\triangle COB$,可得$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|$，

故$\triangle ABC$为等边三角形，④正确；

对于⑤，由$\sin^2 A+\sin^2 B+\cos^2 C<1$得$\sin^2 A+\sin^2 B<1-\cos^2 C=\sin^2 C$，

即$a^2+b^2<c^2$，即$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0$，

由于$C\in(0,\pi)$，故C为钝角，故$\triangle ABC$为钝角三角形，⑤正确，

故答案为：②④⑤

【点睛】方法点睛：判断三角形形状问题可以利用正余弦定理，根据角的范围进行判断，注意正余弦定理边角互化的应用，也可以利用向量的线性运算或者数量积的运算进行判断.

7．①②④

【分析】根据规律判断①，利用特殊值判断②，由$S_{\triangle A_nA_{n+1}A_{n+2}}=S_{\triangle OA_nA_{n+1}}+S_{\triangle OA_{n+1}A_{n+2}}$判断③；利用余弦定理证明从而判断④.

【详解】依题意可得对于任意正整数n，$\left|A_nA_{n+4}\right|=\left|n-(n+4)\right|=4$，故①正确；

当$n=3$时，$\left|A_3A_4\right|=\sqrt{3^2+4^2}=5\in Z$，故②正确；

$S_{\triangle A_nA_{n+1}A_{n+2}}=S_{\triangle OA_nA_{n+1}}+S_{\triangle OA_{n+1}A_{n+2}}=\dfrac{1}{2}\left|OA_n\right|\cdot\left|OA_{n+1}\right|+\dfrac{1}{2}\left|OA_{n+1}\right|\cdot\left|OA_{n+2}\right|$

$=\dfrac{1}{2}n\cdot(n+1)+\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)=(n+1)^2$，因为$(n+1)^2$不可能等于2023，故③错误；

$\left|A_nA_{n+1}\right|=\sqrt{n^2+(n+1)^2}=\sqrt{2n^2+2n+1}$，

$\left|A_{n+1}A_{n+2}\right|=\sqrt{(n+1)^2+(n+2)^2}=\sqrt{2n^2+6n+5}$，

$\left|A_nA_{n+2}\right|=n+n+2=2n+2=\sqrt{4n^2+8n+4}$，

因为$\left|A_nA_{n+1}\right|<\left|A_{n+1}A_{n+2}\right|<\left|A_nA_{n+2}\right|$，所以在三角形$A_{n+2}A_{n+1}A_n$中，$\angle A_{n+2}A_{n+1}A_n$为最大角，

$$\cos\angle A_{n+2}A_{n+1}A_n=\frac{2n^2+2n+1+2n^2+6n+5-\left(4n^2+8n+4\right)}{2\sqrt{2n^2+2n+1}\cdot\sqrt{2n^2+6n+5}}$$

$$=\frac{2}{2\sqrt{2n^2+2n+1}\cdot\sqrt{2n^2+6n+5}}>0,$$

则$\angle A_{n+2}A_{n+1}A_n$为锐角，即三角形$A_nA_{n+1}A_{n+2}$为锐角三角形，故④正确；

故答案为：①②④

【点睛】关键点点睛：本题解题的关键在于根据阿基米德螺线的规律，结合两点间的距离公式，面积公式，余弦定理等探究求解即可.