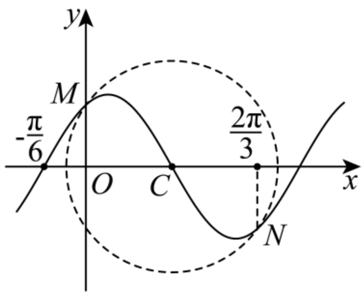
书院课程第二讲

1．已知函数 $f\left(x\right)=\cos\left(\omega x-\varphi\right)$ 的图象关于原点对称，其中 $\omega>0$，$\varphi\in\left(-\pi,0\right)$，且在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$ 上有且只有一个最大值和一个最小值，则 ω 的取值范围为_____.

2．已知函数 $f(x)=\frac{\sqrt{3}\pi}{6}\sin(\omega x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$ 的部分图象如图中实线所示，圆 C 与 $f(x)$ 图象交于 M，N 两点，且 M 在 y 轴上，则圆 C 的半径为________.



3．设函数 $y=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 在区间 $\left[t,t+\frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值为 $g\left(t_1\right)$，最小值为 $g\left(t_2\right)$，则 $g\left(t_1\right)-g\left(t_2\right)$ 的最小值为_____.

4．已知函数 $f\left(x\right)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)\left(\omega>0\right)$ 在 $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(0,2\pi\right)$ 上恰有 3 个零点，则 ω 的取值范围是_____.

5．已知函数其中 $\omega>0$．若 $f\left(x\right)=\sqrt{2}\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$ 上单调递增，则 ω 的取值范围是_________.

6．设函数 $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)\left(x\in\left[0,\dfrac{7\pi}{6}\right]\right)$，若函数 $y=f\left(x\right)-a$ 恰有三个不同的零点，分别为 $x_1,x_2,x_3\left(x_1<x_2<x_3\right)$，则 $x_1+3x_2+2x_3$ 的值为________.

7．已知函数 $f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\varphi\right)-1$（$\omega>0$，$0<\varphi<\pi$）的图象两邻对称轴之间的距离是 $\dfrac{\pi}{2}$，若将 $f\left(x\right)$ 的图象先向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 单位，再向上平移 1 个单位，所得函数 $g\left(x\right)$ 为奇函数.

(1)求函数 $f\left(x\right)$ 的解析式；

(2)若对任意 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$，$f^2\left(x\right)-\left(2+m\right)f\left(x\right)+2+m\leq 0$ 恒成立，求实数 m 的取值范围；

(3)若函数 $h\left(x\right)=2f\left(x\right)+3$ 的图象在区间 $\left[a,b\right]$（$a,b\in\mathrm{R}$ 且 $a<b$）上至少含有30个零点，在所有满足条件的区间 $\left[a,b\right]$ 上，求 $b-a$ 的最小值.

参考答案：

1．$\left[3,\frac{9}{2}\right)$

【分析】先根据余弦函数的对称性求出φ，再根据正弦函数的图象和性质求解即可.

【详解】因为函数$f\left(x\right)=\cos\left(\omega x-\varphi\right)$的图象关于原点对称，

所以$f\left(0\right)=\cos\left(-\varphi\right)=\cos\varphi=0$，

又因$\varphi\in\left(-\pi,0\right)$，所以$\varphi=-\frac{\pi}{2}$，

所以$f\left(x\right)=\cos\left(\omega x-\varphi\right)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\omega x$，

由$x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$且$\omega>0$，得$\omega x\in\left[-\frac{\pi}{3}\omega,\frac{\pi}{6}\omega\right]$，有且只有一个最大值和一个最小值，

由正弦函数的图象与性质可得$\begin{cases}-\frac{3\pi}{2}<-\frac{\pi}{3}\omega\le-\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{6}\omega<\frac{3\pi}{2}\end{cases}$，解得$3\le\omega<\frac{9}{2}$，

所以ω的取值范围为$\left[3,\frac{9}{2}\right)$.

故答案为：$\left[3,\frac{9}{2}\right)$.

2．$\frac{5\pi}{12}$/$\frac{5}{12}\pi$

【分析】由点的对称性求出点C的横坐标为$\frac{\pi}{3}$，可得函数的周期以及ω值，由五点作图求出φ，可得函数的解析式，从而求得N点坐标，由两点间距离求出圆的半径.

【详解】根据函数$f(x)=\frac{\sqrt{3}\pi}{6}\sin(\omega x+\varphi)(A>0,0<\varphi<\pi)$的部分图象，

由图可知，M，N关于点C对称，易得点C的横坐标为$\frac{\pi}{3}$，

$\therefore f(x)$的周期$T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，所以$\omega=2$，

函数$f(x)=\frac{\sqrt{3}\pi}{6}\sin(2x+\varphi)$，

结合五点法作图，可得$2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=\pi$，

$\therefore\varphi=\frac{\pi}{3}$，$f(x)=\frac{\sqrt{3}\pi}{6}\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，

故$C\left(\frac{\pi}{3},0\right)$，$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}\pi}{6}\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\pi}{4}$，即$N\left(\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{4}\right)$，

所以圆的半径为$CN=\sqrt{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2+\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}=\frac{5\pi}{12}$，

故答案为：$\frac{5\pi}{12}$.

【点睛】关键点睛：本题的关键是利用圆的对称性，结合正弦型函数的对称性进行求解.

3．$4-2\sqrt{2}$ / $-2\sqrt{2}+4$

【分析】首先由函数的解析式求出函数的最小正周期，可得区间为最小正周期的$\frac{1}{4}$，当区间关于对称轴对称时，可得$g(t_1)-g(t_2)$取得最小值，令$g(t_1)=4$，求出t的值，求出$g(t_2)$的值，进而求出所求的代数式的值.

【详解】函数$y=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的最小正周期为$\pi$，由于$t+\frac{\pi}{4}-t=\frac{\pi}{4}$，

则区间$\left[t,t+\frac{\pi}{4}\right]$的长度是周期的$\frac{1}{4}$，

要使$g(t_1)-g(t_2)$取最小值，则$y=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$在$\left[t,t+\frac{\pi}{4}\right]$上不单调，

所以当区间$\left[t,t+\frac{\pi}{4}\right]$关于其对称轴对称时，$g(t_1)-g(t_2)$取得最小值，

其对称轴为$\frac{t+t+\frac{\pi}{4}}{2}=t+\frac{\pi}{8}$，

所以当$x=t+\frac{\pi}{8}$ 时，函数$y=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$取得最值±4，

不妨设$g(t_1)=4$，则$g(t_1)=4\sin(2(t+\frac{\pi}{8})+\frac{\pi}{4})=4\Rightarrow\sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)=1\Rightarrow 2t+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，

解得$t=k\pi,k\in Z$，

所以$g(t_2)=4\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)=4\sin(2k\pi+\frac{\pi}{4})=2\sqrt{2}$，

所以$g(t_1)-g(t_2)$的最小值为$4-2\sqrt{2}$，

故答案为：$4-2\sqrt{2}$

4．$\left(\frac{7}{6},\frac{11}{9}\right]$

【分析】先通过有 3 个零点列不等式求ω的取值范围，再通过在$\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$上单调递减列不等式求$\omega$的取值范围，综合可得$\omega$的取值范围.

【详解】设$t=\omega x-\frac{\pi}{3}$，当$x\in(0,2\pi)$时，$t\in\left(-\frac{\pi}{3},2\pi\omega-\frac{\pi}{3}\right)$，

因为函数$f(x)$在$(0,2\pi)$上恰有 3 个零点，

则$2\pi<2\pi\omega-\frac{\pi}{3}\le 3\pi$，解得$\frac{7}{6}<\omega\le\frac{5}{3}$.

当 $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ 时，$t\in\left(\pi\omega-\frac{\pi}{3},\frac{3\pi\omega}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$，

因为函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ 上单调递减，

所以 $\begin{cases}\pi\omega-\frac{\pi}{3}\geq\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ \frac{3\pi\omega}{2}-\frac{\pi}{3}\leq\frac{3\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$，$k\in\mathrm{Z}$，解得 $\frac{5}{6}+2k\leq\omega\leq\frac{11}{9}+\frac{4k}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，

取 $k=0$，则 $\frac{5}{6}\leq\omega\leq\frac{11}{9}$.

综上，$\frac{7}{6}<\omega\leq\frac{11}{9}$.

故答案为：$\left(\frac{7}{6},\frac{11}{9}\right]$.

5．$\left(0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{5}{2},3\right]$

【分析】由复合函数单调性、正弦函数单调性得出关于 ω 不等式组，从而 $4k-\frac{3}{2}\leq\omega\leq\frac{8}{3}k+\frac{1}{3}$，进一步结合 $\omega>0$，又可得到关于 k 的不等式组，结合 $k\in\mathrm{Z}$ 即可得解.

【详解】由题意 $\omega>0$，所以 $t\left(x\right)=\omega x+\frac{\pi}{4}$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$ 单调递增，

若 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$ 上单调递增，则 $y=\sqrt{2}\sin t$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\omega+\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增，

所以 $\begin{cases}\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4}\geq-\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ \frac{3\pi}{4}\omega+\frac{\pi}{4}\leq\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$，其中 $k\in\mathrm{Z}$，解得 $4k-\frac{3}{2}\leq\omega\leq\frac{8}{3}k+\frac{1}{3}$，

从而 $\begin{cases}4k-\frac{3}{2}\leq\frac{8}{3}k+\frac{1}{3}\\ \frac{8}{3}k+\frac{1}{3}>0\end{cases}$ 等号不能同时成立，解得 $-\frac{1}{8}<k\leq\frac{11}{8}$，

又 $k\in\mathrm{Z}$，所以只能 $k=0,0<\omega\leq\frac{1}{3}$ 或 $k=1,\frac{5}{2}\leq\omega\leq3$，

即 ω 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{5}{2},3\right]$.

故答案为：$\left(0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{5}{2},3\right]$.

【点睛】关键点点睛：在得出 $4k-\frac{3}{2}\leq\omega\leq\frac{8}{3}k+\frac{1}{3}$ 后还要结合题意得 $0\leq4k-\frac{3}{2}\leq\frac{8}{3}k+\frac{1}{3}$，$k\in\mathrm{Z}$，由此即可顺利得解.

6．3π

【分析】根据三角函数的对称性，先求出函数的对称轴，结合函数与方程的关系转化为两个

函数的交点问题，利用数形结合进行求解即可.

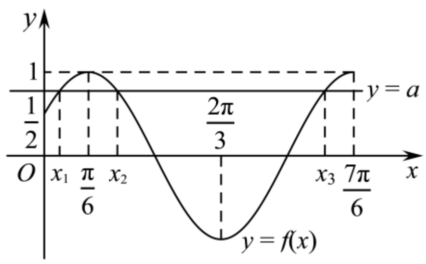
【详解】由 $2x+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$，得 $f\left(x\right)$ 的对称轴为：$x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},k\in Z$，

因为 $0\le x\le\frac{7\pi}{6}$，由 $0\le\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\le\frac{7\pi}{6},k\in Z$，解得 $-\frac{1}{3}\le k\le 2$，

当 $k=0$ 时，对称轴为 $x=\frac{\pi}{6}$，当 $k=1$ 时，对称轴为 $x=\frac{2\pi}{3}$，

若函数 $y=f\left(x\right)-a$ 恰有三个不同的零点，等价于函数 $y=f\left(x\right)$ 与 $y=a$ 的图象有三个交点，

作出函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象如图，得 $f\left(0\right)=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{1}{2}\le a<1$，



由图象可知，点 $\left(x_1,f\left(x_1\right)\right)$ 和 $\left(x_2,f\left(x_2\right)\right)$ 关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称，则 $x_1+x_2=\frac{\pi}{3}$；点 $\left(x_2,f\left(x_2\right)\right)$ 和 $\left(x_3,f\left(x_3\right)\right)$ 关于直线 $x=\frac{2\pi}{3}$ 对称，则 $x_2+x_3=\frac{4\pi}{3}$ ，

因此，$x_1+3x_2+2x_3=\left(x_1+x_2\right)+2\left(x_2+x_3\right)=\frac{\pi}{3}+2\times\frac{4\pi}{3}=3\pi$.

故答案为：3π

7．(1) $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})-1$

(2) $(-\infty,-\frac{5}{2}]$

(3) $\frac{43\pi}{3}$

【分析】（1）根据题意可求得参数 $\omega=2$，根据三角函数的图象的平移以及函数的奇偶性求得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，即得函数解析式；

（2）根据 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$，求得函数 $f\left(x\right)$ 的范围，将不等式恒成立问题转化为函数最值问题求解，即可求得参数范围；

（3）令 $h\left(x\right)=0$，求得函数零点的表达式，根据题意判断相邻两个零点之间的距离为 $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$，根据区间内零点个数即可确定答案.

【详解】（1）由 $\frac{2\pi}{\omega}=2\times\frac{\pi}{2}$,得 $\omega=2$，则 $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\varphi\right)-1$,

则 $g\left(x\right)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\varphi\right]-1+1=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$ 为奇函数，所以 $g\left(0\right)=0$，又 $0<\varphi<\pi$，

则 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，

故 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})-1$.

（2）由于 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$，则 $2x+\frac{\pi}{3}\in[\frac{\pi}{3},\pi]$，$\sin(2x+\frac{\pi}{3})\in[0,1]$，

故 $-1\le f(x)\le 0,-2\le f(x)-1\le -1$,

而 $f^2\left(x\right)-\left(2+m\right)f\left(x\right)+2+m\le 0$ 恒成立,即 $f^2\left(x\right)-2f\left(x\right)+2\le(f\left(x\right)-1)m$，

整理可得 $m\le\frac{1}{f(x)-1}+f(x)-1$，令 $t=f(x)-1,t\in[-2,-1]$，

设 $m(t)=\frac{1}{t}+t,t\in[-2,-1]$，设 $t_1,t_2\in[-2,-1]$ 且 $t_1<t_2$，

则 $m(t_1)-m(t_2)=\frac{1}{t_1}+t_1-\frac{1}{t_2}-t_2=(t_1-t_2)\cdot\frac{t_1t_2-1}{t_1t_2}$，

由于 $t_1-t_2<0,t_1t_2>1$，则 $m(t_1)-m(t_2)<0,\therefore m(t_1)<m(t_2)$，

即 $m(t)=\frac{1}{t}+t$ 在 $[-2,-1]$ 上递增，故 $m(t)_{\min}=m(-2)=-\frac{5}{2}$，

故 $m\le-\frac{5}{2}$，即 m 取值范围是 $(-\infty,-\frac{5}{2}]$.

（3）由题意知 $h\left(x\right)=2f\left(x\right)+3=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})+1$，

由 $h\left(x\right)=0$ 得 $\sin(2x+\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{2}$，

故 $2x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{7\pi}{6}$ 或 $2x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{11\pi}{6},k\in Z$,

求得 $x=k\pi+\frac{5\pi}{12}$ 或 $x=k\pi+\frac{3\pi}{4},k\in Z$，

故函数 $h\left(x\right)$ 的零点为 $x=k\pi+\frac{5\pi}{12}$ 或 $x=k\pi+\frac{3\pi}{4},k\in Z$,

□相邻两个零点之间的距离为 $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$，

若 $b-a$ 最小，则 a 和 b 都是零点，此时在区间 $[a,\pi+a],[a,2\pi+a],\cdots,[a,m\pi+a],\left(m\in N^*\right)$ 分别

恰有 $3,5,\cdots,2m+1$ 个零点,

所以在区间 $[a,14\pi+a]$ 是恰有 29 个零点，从而在区间 $(14\pi+a,b]$ 上至少有一个零点，

□ $b-a-14\pi \geq \frac{\pi}{3}$，

另一方面，在区间$\left[\frac{5\pi}{12}, 14\pi+\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{12}\right]$上恰有 30 个零点，

因此$b-a$的最小值为$14\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{43\pi}{3}$.

【点睛】难点点睛：解答第三问根据零点个数求解区间端点处的值的差的最小值时，要求出函数零点，判断两点间的距离，从而判断要满足题意，区间内的零点情况，从而求出$b-a$的最小值.