2022年高考真题新高考II卷数学试卷-学生用卷

一、选择题本大题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

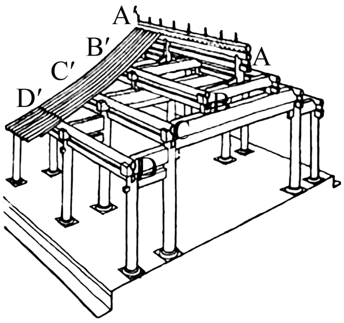
1、已知集合 $A=\{-1,1,2,4\}, B=\{x||x-1|\leqslant 1\}$，则 $A\cap B=$（　　）

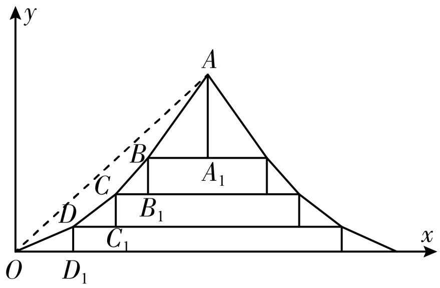
A. $\{-1,2\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{1,4\}$　　D. $\{-1,4\}$

2、$(2+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})=$（　　）

A. $-2+4\mathrm{i}$　　B. $-2-4\mathrm{i}$　　C. $6+2\mathrm{i}$　　D. $6-2\mathrm{i}$

3、中国的古建筑不仅是挡风遮雨的住处，更是美学和哲学的体现．如图是某古建筑物的剖面图，AA'，BB'，CC'，DD'是桁，DD_1，CC_1，BB_1,AA_1是脊，OD_1，DC_1，CB_1,BA_1是相等的步，相邻桁的脊步之比分别为$\frac{DD_1}{OD_1}=0.5$，$\frac{CC_1}{DC_1}=k_1$，$\frac{BB_1}{CB_1}=k_2$，$\frac{AA_1}{BA_1}=k_3$，若k_1，k_2，k_3是公差为0.1的等差数列，且直线OA的斜率为0.725，则$k_3=$（　　）





A. 0.75　　B. 0.8　　C. 0.85　　D. 0.9

4、已知$\vec{a}=(3,4)$，$\vec{b}=(1,0)$，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$，若$\langle\vec{a},\vec{c}\rangle=\langle\vec{b},\vec{c}\rangle$，则实数 $t=$（　　）

A. -6　　B. -5　　C. 5　　D. 6

5、有甲、乙、丙、丁、戊5名同学站成一排参加文艺汇演，若甲不站在两端，丙和丁相邻的不同排列方式有（　　）

A. 12种

B. 24种

C. 36种

D. 48种

6、若 $\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=2\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\beta$，则（　　　　　　）

A. $\tan(\alpha+\beta)=1$

B. $\tan(\alpha+\beta)=-1$

C. $\tan(\alpha-\beta)=1$

D. $\tan(\alpha-\beta)=-1$

7、已知正三棱台的高为 1，上、下底面的边长分别为 $3\sqrt{3}$和 $4\sqrt{3}$，所有顶点在同一球面上，则球的表面积是（　　　　　　）

A. 100π　　B. 128π　　C. 144π　　D. 192π

8、若函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$，$f(1)=1$，则$\sum_{k=1}^{22}f(k)=$（　　　　　　）

A. -3　　B. -2　　C. 0　　D. 1

二、选择题本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9、已知函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$的图象关于点$\left(\frac{2\pi}{3},0\right)$中心对称，则（　　　　　　）

A. $f(x)$在$\left(0,\frac{5\pi}{12}\right)$单调递减

B. $f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right)$有 2 个极值点

C. 直线 $x=\frac{7\pi}{6}$是曲线 $y=f(x)$ 的一条对称轴

D. 直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}-x$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线

10、已知 O 为坐标原点，过抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$的焦点 F 的直线与 C 交于 A，B 两点，点 A 在第一象限，点 $M(p,0)$，若$|AF|=|AM|$，则（　　　　　　）

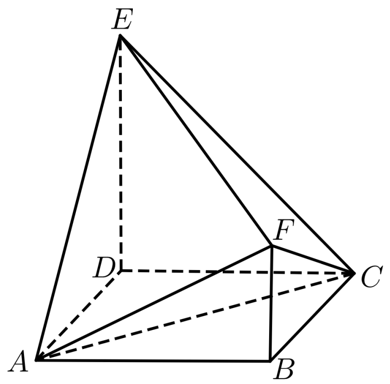
A. 直线 AB 的斜率为 $2\sqrt{6}$

B. $|OB| = |OF|$

C. $|AB| > 4|OF|$

D. $\angle OAM + \angle OBM < 180°$

11、如图，四边形 $ABCD$ 为正方形，$ED\perp$平面 $ABCD$，$FB//ED$，$AB = ED = 2FB$，记三棱锥 $E-ACD$，$F-ABC$，$F-ACE$ 的体积分别为V_1，V_2，V_3，则（　　　　　　）



A. $V_3 = 2V_2$

B. $V_3 = 2V_1$

C. $V_3 = V_1 + V_2$

D. $2V_3 = 3V_1$

12、若实数 x，y 满足$x^2 + y^2 - xy = 1$，则（　　　　　　）

A. $x + y < 1$

B. $x + y \geqslant -2$

C. $x^2 + y^2 \geqslant 1$

D. $x^2 + y^2 \leqslant 2$

三、填空题本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13、已知随机变量 X 服从正态分布 $N(2,\sigma^2)$，且 $P(2 < X \leqslant 2.5) = 0.36$，则 $P(X > 2.5) =$ __________________ .

14、曲线 $y = \ln|x|$经过坐标原点的两条切线方程分别

为：________________，________________.

15、设点 $A(-2,3)$，$B(0,a)$，若直线 AB 关于 $y=a$ 的对称直线为 l，已知 l 与圆 C：$(x+3)^2+(y+2)^2=1$ 有公共点，则实数 a 的取值范围为 ________________.

16、已知直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ 在第一象限交于 A，B 两点，与 x 轴，y 轴分别交于 M，N 两点，且 $|MA|=|NB|$，$|MN|=2\sqrt{3}$，则直线 l 的方程为 ________________.

四、解答题本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17、已知$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$是公比为 2 的等比数列，且$a_2-b_2=a_3-b_3=b_4-a_4$.

(1) 证明：$a_1=b_1$；

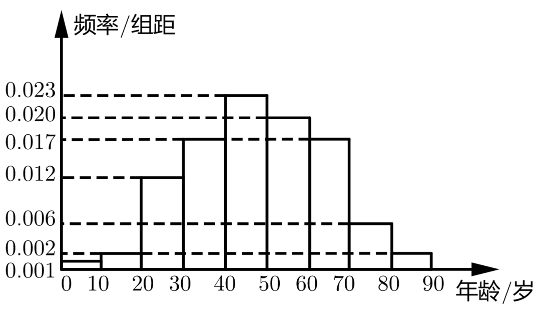
(2) 求集合$\{k|b_k=a_m+a_1,1\leqslant m\leqslant 500\}$中元素个数.

18、记△ABC 的内角分别为 A，B，C，其对边分别为 a，b，c，分别以 a，b，c 为边长的三个正三角形的面积依次为S_1，S_2，S_3，已知$S_1-S_2+S_3=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\sin B=\frac{1}{3}$.

(1) 求△ABC 的面积；

(2) 若 $\sin A\sin C=\frac{\sqrt{2}}{3}$，求 b.

19、在某地区进行某种疾病调查，随机调查了 100 名这种疾病患者的年龄，得到如下的样本数据频率分布直方图.



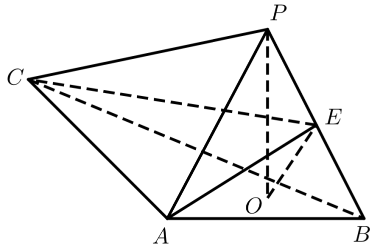
(1) 估计该地区这种疾病患者的平均年龄（同一组中的数据用该组区间的中点值作代表）.

(2) 估计该地区一位这种疾病患者年龄在区间[20,70)的概率.

(3) 已知该地区这种疾病患者的患病率为 0.1%，该地区年龄位于区间[40,50)的人口占该地区总人

口的 16%，从该地区任选 1 人，若此人年龄位于区间[40,50)，求此人患该种疾病的概率．（样本数据中的患者年龄位于各区间的频率作为患者年龄位于该区间的概率，精确到 0.0001）

20、如图，PO 是三棱锥 $P-ABC$ 的高，$PA=PB$，$AB\perp AC$，E 是 PB 的中点．



(1) 求证：$OE//$平面 PAC；

(2) 若$\angle ABO=\angle CBO=30°$，$PO=3$，$PA=5$，求二面角 $C-AE-B$ 的正弦值．

21、设双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为 $F(2,0)$，渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$.

(1) 求 C 的方程；

(2) 经过 F 的直线与 C 的渐近线分别交于 A，B 两点，点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$在 C 上，且$x_1>x_2>0$，$y_1>0$．过 P 且斜率为$-\sqrt{3}$的直线与过 Q 且斜率为$\sqrt{3}$的直线交于点 M，请从下面三个条件①②③中选取两个作为条件，证明另外一个条件成立：

①M 在 AB 上；②$PQ//AB$；③$|MA|=|MB|$.

注：若选择不同的组合分别解答，则按第一个解答计分．

22、已知函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^x$.

(1) 当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$的单调性；

(2) 当 $x>0$ 时，$f(x)<-1$，求实数 a 的取值范围；

(3) 设 $n\in\mathbf{N}^*$，证明：$\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{2^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}>\ln(n+1)$.

1 、【答案】 B;

【解析】 $B=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，

故 $A\cap B=\{1,2\}$，

故选：B.

2 、【答案】 D;

【解析】 $(2+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})=2+4-4\mathrm{i}+2\mathrm{i}=6-2\mathrm{i}$，

故选：D.

3 、【答案】 D;

【解析】 设 $OD_1=DC_1=CB_1=BA_1=1$，

则 $CC_1=k_1$，$BB_1=k_2$，$AA_1=k_3$，

依题意，有$k_3-0.2=k_1,k_3-0.1=k_2$，

且$\frac{DD_1+CC_1+BB_1+AA_1}{OD_1+DC_1+CB_1+BA_1}=0.725$，

所以$\frac{0.5+3k_3-0.3}{4}=0.725$，故$k_3=0.9$，

故选：D.

4 、【答案】 C;

【解析】 由已知得$\vec{c}=(3+t,4)$，$\cos\langle\vec{a},\vec{c}\rangle=\cos\langle\vec{b},\vec{c}\rangle$，

即$\frac{9+3t+16}{5|\vec{c}|}=\frac{3+t}{|\vec{c}|}$,

解得 $t=5$，

故选：C.

5 、【答案】 B;

【解析】 因为丙、丁要在一起，先把丙、丁捆绑，看做一个元素，连同乙、戊看成三个元素排列，有 3!种排列方式；为使甲不在两端，必须且只需甲在此三个元素的中间两个位置任选一个位置插入，有 2 种插空方式；注意到丙、丁两人的顺序可交换，有 2 种排列方式，故安排这 5 名同学共有：$3!\times2\times2=24$（种）不同的排列方式，故选：B.

6 、【答案】 D;

【解析】 由已知得：

$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=2(\cos\alpha-\sin\alpha)\sin\beta$，即：$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=0$，即：$\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha-\beta)=0$，所以 $\tan(\alpha-\beta)=-1$，

故选：D.

7 、【答案】 A;

【解析】 设正三棱台上、下底面所在圆面的半径分别为r_1，r_2，

所以 $2r_1=\frac{3\sqrt{3}}{\sin 60°}$，$2r_2=\frac{4\sqrt{3}}{\sin 60°}$，

即$r_1=3$，$r_2=4$，

设球心到上、下底面的距离分别为d_1，d_2，球的半径为 R，

所以$d_1=\sqrt{R^2-9}$，$d_2=\sqrt{R^2-16}$，

故$|d_1-d_2|=1$ 或$d_1+d_2=1$，

即$\left|\sqrt{R^2-9}-\sqrt{R^2-16}\right|=1$ 或$\sqrt{R^2-9}+\sqrt{R^2-16}=1$，

解得$R^2=25$ 符合题意，

所以球的表面积为 $S=4\pi R^2=100\pi$.

故选：A.

8 、【答案】 A;

【解析】 因为 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$，

令 $x=1$，$y=0$，可得 $2f(1)=f(1)f(0)$，

所以 $f(0)=2$，令 $x=0$，可得 $f(y)+f(-y)=2f(y)$，

即 $f(y)=f(-y)$，所以函数 $f(x)$为偶函数，

令 $y=1$，得 $f(x+1)+f(x-1)=f(x)f(1)=f(x)$，

即有 $f(x+2)+f(x)=f(x+1)$，

从而可知 $f(x+2)=-f(x-1)$，$f(x-1)=-f(x-4)$，

故 $f(x+2)=f(x-4)$，即 $f(x)=f(x+6)$，

所以函数 $f(x)$的一个周期为 6.

因为 $f(2)=f(1)-f(0)=1-2=-1$，

$f(3)=f(2)-f(1)=-1-1=-2$，

$f(4)=f(-2)=f(2)=-1$，

$f(5)=f(-1)=f(1)=1$，

$f(6)=f(0)=2$，

所以一个周期内的 $f(1)+f(2)+\cdots+f(6)=0$.

由于 22 除以 6 余 4，所以$\sum_{k=1}^{22} f(k)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=1-1-2-1=-3$.

故选：A.

9 、【答案】 A;D;

【解析】 由题意得：$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\varphi\right)=0$，

所以$\frac{4\pi}{3}+\varphi=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即$\varphi=-\frac{4\pi}{3}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

又 $0<\varphi<\pi$，所以 $k=2$ 时，$\varphi=\frac{2\pi}{3}$，故 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$.

对 A，当 $x\in\left(0,\frac{5\pi}{12}\right)$时，$2x+\frac{2\pi}{3}\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{2}\right)$，

由正弦函数 $y=\sin u$ 的图象知 $y=f(x)$在$\left(0,\frac{5\pi}{12}\right)$上单调递减；

对 B，当 $x\in\left(-\frac{\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right)$时，$2x+\frac{2\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right)$，

由正弦函数 $y=\sin u$ 的图象知 $y=f(x)$只有 1 个极值点，

由 $2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$，解得 $x=\frac{5\pi}{12}$，即 $x=\frac{5\pi}{12}$为函数的唯一极值点；

对 C，当 $x=\frac{7\pi}{6}$时，$2x+\frac{2\pi}{3}=3\pi$，$f\left(\frac{7\pi}{6}\right)=0$，直线 $x=\frac{7\pi}{6}$不是对称轴；

对 D，由$y'=2\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=-1$ 得：$\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$，

解得 $2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$或 $2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

从而得：$x=k\pi$或 $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以函数 $y=f(x)$在点$\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$处的切线斜率为 $k=y'\big|_{x=0}=2\cos\frac{2\pi}{3}=-1$，

切线方程为：$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-(x-0)$，即 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}-x$.

故选：AD.

10 、【答案】 A;C;D;

【解析】 对于 A，易得 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，由$|AF|=|AM|$可得点 A 在 FM 的垂直平分线上，

则 A 点的横坐标为$\frac{\frac{p}{2}+p}{2}=\frac{3p}{4}$，

代入抛物线可得$y^2=2p\cdot\frac{3p}{4}=\frac{3}{2}p^2$，则 $A\left(\frac{3p}{4},\frac{\sqrt{6}p}{2}\right)$，

则直线 AB 的斜率为$\frac{\frac{\sqrt{6}p}{2}}{\frac{3p}{4}-\frac{p}{2}}=2\sqrt{6}$，A 正确；

对于 B，由斜率为 $2\sqrt{6}$可得直线 AB 的方程为 $x=\frac{1}{2\sqrt{6}}y+\frac{p}{2}$,

联立抛物线方程得$y^2-\frac{1}{\sqrt{6}}py-p^2=0$，设 $B(x_1,y_1)$，

则$\frac{\sqrt{6}}{2}p+y_1=\frac{\sqrt{6}}{6}p$，

则$y_1=-\frac{\sqrt{6}p}{3}$，代入抛物线得$\left(-\frac{\sqrt{6}p}{3}\right)^2=2p\cdot x_1$，解得$x_1=\frac{p}{3}$,

则 $B\left(\frac{p}{3},-\frac{\sqrt{6}p}{3}\right)$，则$|OB|=\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{6}p}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}p}{3}\neq|OF|=\frac{p}{2}$，B 错误；

对于 C，由抛物线定义知：$|AB|=\frac{3p}{4}+\frac{p}{3}+p=\frac{25p}{12}>2p=4|OF|$，C 正确；

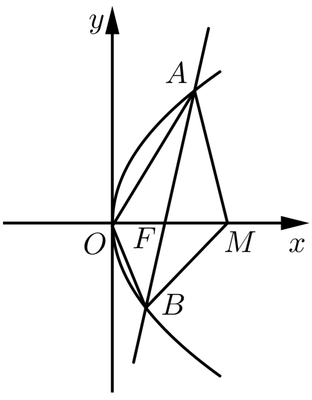
对于 D，$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=\left(\frac{3p}{4},\frac{\sqrt{6}p}{2}\right)\cdot\left(\frac{p}{3},-\frac{\sqrt{6}p}{3}\right)=\frac{3p}{4}\cdot\frac{p}{3}+\frac{\sqrt{6}p}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{6}p}{3}\right)=-\frac{3p^2}{4}<0$，则$\angle AOB$ 为钝角，

又$\vec{MA}\cdot\vec{MB}=\left(-\frac{p}{4},\frac{\sqrt{6}p}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2p}{3},-\frac{\sqrt{6}p}{3}\right)=-\frac{p}{4}\cdot\left(-\frac{2p}{3}\right)+\frac{\sqrt{6}p}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{6}p}{3}\right)=-\frac{5p^2}{6}<0$，则$\angle AMB$ 为钝角，

又$\angle AOB+\angle AMB+\angle OAM+\angle OBM=360°$，

则$\angle OAM+\angle OBM<180°$，D 正确.

故选：ACD.



11 、【答案】 C;D;

【解析】 设 $AB=ED=2FB=2a$，因为 $ED\perp$平面 $ABCD$，$FB//ED$，

则$V_1=\frac{1}{3}\cdot ED\cdot S_{\triangle ACD}=\frac{1}{3}\cdot 2a\cdot\frac{1}{2}\cdot(2a)^2=\frac{4}{3}a^3$，

$V_2=\frac{1}{3}\cdot FB\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}\cdot a\cdot\frac{1}{2}\cdot(2a)^2=\frac{2}{3}a^3$，

连接 BD 交 AC 于点 M，连接 EM，FM，易得 $BD \perp AC$，

又 $ED \perp$平面 $ABCD$，$AC \subset$平面 $ABCD$，

则 $ED \perp AC$，

又 $ED \cap BD = D$，ED、$BD \subset$平面 $BDEF$，

则 $AC \perp$平面 $BDEF$，

又 $BM = DM = \frac{1}{2}BD = \sqrt{2}a$，过 F 作 $FG \perp DE$ 于 G，

易得四边形 $BDGF$ 为矩形，则 $FG = BD = 2\sqrt{2}a$，$EG = a$，

则 $EM = \sqrt{(2a)^2 + \left(\sqrt{2}a\right)^2} = \sqrt{6}a$，$FM = \sqrt{a^2 + \left(\sqrt{2}a\right)^2} = \sqrt{3}a$，$EF = \sqrt{a^2 + \left(2\sqrt{2}a\right)^2} = 3a$，

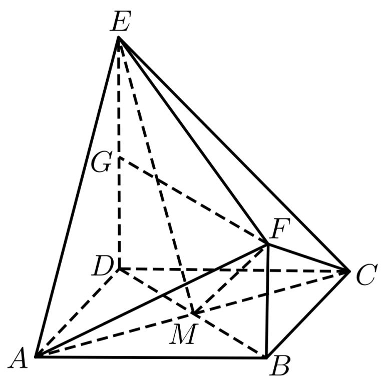
则 $EM^2 + FM^2 = EF^2$，

则 $EM \perp FM$，$S_{\triangle EFM} = \frac{1}{2}EM \cdot FM = \frac{3\sqrt{2}}{2}a^2$，$AC = 2\sqrt{2}a$，

则$V_3 = V_{A-EFM} + V_{C-EFM} = \frac{1}{3}AC \cdot S_{\triangle EFM} = 2a^3$，

则 $2V_3 = 3V_1$，$V_3 = 3V_2$，$V_3 = V_1 + V_2$，故 A、B 错误；C、D 正确.

故选：CD.



12 、【答案】 B;D;

【解析】 因为 $ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$（$a,b \in \mathbf{R}$），

由$x^2 + y^2 - xy = 1$ 可变形为，$(x+y)^2 - 1 = 3xy \leqslant 3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$，

解得$-2 \leqslant x + y \leqslant 2$，

当且仅当 $x = y = -1$ 时，$x + y = -2$，当且仅当 $x = y = 1$ 时，$x + y = 2$，

所以 A 错误，B 正确；

因为$x^2+y^2-xy=1$变形可得$\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2=1$，

设 $x-\frac{y}{2}=\cos\theta$，$\frac{\sqrt{3}}{2}y=\sin\theta$，

所以 $x=\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta$，$y=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta$，

因此$x^2+y^2=\cos^2\theta+\frac{5}{3}\sin^2\theta+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\cos\theta$

$=1+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 2\theta-\frac{1}{3}\cos 2\theta+\frac{1}{3}$

$=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[\frac{2}{3},2\right]$，

所以当 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}$时满足等式，

但是$x^2+y^2\geqslant 1$不成立，所以 C 错误.

由$x^2+y^2-xy=1$可变形为$(x^2+y^2)-1=xy\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}$，

解得$x^2+y^2\leqslant 2$，当且仅当 $x=y=\pm 1$ 时取等号，所以 D 正确；

故选：BD.

13 、【答案】 0.14

;

【解析】 因为 $X\sim N(2,\sigma^2)$，所以 $P(X<2)=P(X>2)=0.5$，因此 $P(X>2.5)=P(X>2)-P(2<X\leqslant 2.5)=0.5-0.36=0.14$.

故答案为：0.14.

14 、【答案】 $y=\frac{1}{\mathrm{e}}x;y=-\frac{1}{\mathrm{e}}x$

;

【解析】 解： 因为 $y=\ln|x|$，当 $x>0$ 时，$y=\ln x$，

设切点为$(x_0,\ln x_0)$，由$y'=\frac{1}{x}$，

所以$y'|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$，所以切线方程为 $y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$，

又切线过坐标原点，所以$-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(-x_0)$，解得$x_0=\mathrm{e}$，

所以切线方程为 $y-1=\frac{1}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e})$，即 $y=\frac{1}{\mathrm{e}}x$；

当 $x<0$ 时，$y=\ln(-x)$，

设切点为$(x_1,\ln(-x_1))$，由$y'=\frac{1}{x}$,

所以$y'|_{x=x_1}=\frac{1}{x_1}$,

所以切线方程为 $y-\ln(-x_1)=\frac{1}{x_1}(x-x_1)$，

又切线过坐标原点，所以$-\ln(-x_1)=\frac{1}{x_1}(-x_1)$，解得$x_1=-\mathrm{e}$，

所以切线方程为 $y-1=\frac{1}{-\mathrm{e}}(x+\mathrm{e})$，即 $y=-\frac{1}{\mathrm{e}}x$；

故答案为：$y=\frac{1}{\mathrm{e}}x$；$y=-\frac{1}{\mathrm{e}}x$.

15 、【答案】 $\left[\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right]$;

【解析】 $A(-2,3)$关于 $y=a$ 对称的点的坐标为$A'(-2,2a-3)$，

$B(0,a)$在直线 $y=a$ 上，所以$A'B$ 所在直线即为直线 l,

所以直线 l 为 $y=\frac{a-3}{-2}x+a$，即$(a-3)x+2y-2a=0$；圆 C：$(x+3)^2+(y+2)^2=1$，圆心 $C(-3,-2)$，半径 $r=1$，

依题意圆心到直线 l 的距离 $d=\frac{|-3(a-3)-4-2a|}{\sqrt{(a-3)^2+2^2}}\leqslant 1$,

即$(5-5a)^2\leqslant(a-3)^2+2^2$，

解得$\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}$，即 $a\in\left[\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right]$.

故答案为：$\left[\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right]$.

16 、【答案】 $x+\sqrt{2}y-2\sqrt{2}=0$;

【解析】 令 AB 的中点为 E，因为$|MA|=|NB|$，所以$|ME|=|NE|$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$\frac{x_1^2}{6}+\frac{y_1^2}{3}=1$，$\frac{x_2^2}{6}+\frac{y_2^2}{3}=1$，

所以$\frac{x_1^2}{6}-\frac{x_2^2}{6}+\frac{y_1^2}{3}-\frac{y_2^2}{3}=0$，

即$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{6}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{3}=0$，

所以$\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}=-\frac{1}{2}$，即$k_{OE}\cdot k_{AB}=-\frac{1}{2}$,

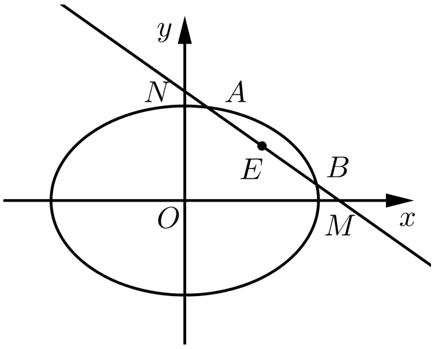
设直线 AB:$y=kx+m$，$k<0$，$m>0$，

令 $x=0$ 得 $y=m$，令 $y=0$ 得 $x=-\frac{m}{k}$，即 $M\left(-\frac{m}{k},0\right)$，$N(0,m)$，

所以 $E\left(-\frac{m}{2k},\frac{m}{2}\right)$，即 $k\times\frac{\frac{m}{2}}{-\frac{m}{2k}}=-\frac{1}{2}$，解得 $k=-\frac{\sqrt{2}}{2}$或 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$（舍去），

又$|MN|=2\sqrt{3}$，即$|MN|=\sqrt{m^2+\left(\sqrt{2}m\right)^2}=2\sqrt{3}$，解得 $m=2$ 或 $m=-2$（舍去），

所以直线 $AB:y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+2$，即 $x+\sqrt{2}y-2\sqrt{2}=0$.



故答案为：$x+\sqrt{2}y-2\sqrt{2}=0$.

17 、【答案】 (1) 证明见解析.

;

(2) 9.

;

【解析】 (1) 设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，所以，$\begin{cases}a_1+d-2b_1=a_1+2d-4b_1\\a_1+d-2b_1=8b_1-(a_1+3d)\end{cases}$,

解得$b_1=a_1=\frac{d}{2}$，所以原命题得证.

(2) 由（1）知，$b_1=a_1=\frac{d}{2}$,

所以$b_k=a_m+a_1\Leftrightarrow b_1\times 2^{k-1}=a_1+(m-1)d+a_1$，即$2^{k-1}=2m$，

即 $m=2^{k-2}\in[1,500]$，解得 $2\leqslant k\leqslant 10$，

所以满足等式的解 $k=2,3,4,\cdots,10$，

故集合$\{k|b_k=a_m+a_1,1\leqslant m\leqslant 500\}$中的元素个数为 $10-2+1=9$.

18 、【答案】 (1) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

;

(2) $\frac{1}{2}$

;

【解析】(1) 由题意得$S_1=\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，$S_2=\frac{\sqrt{3}}{4}b^2$，$S_3=\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$，

则$S_1-S_2+S_3=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{\sqrt{3}}{4}b^2+\frac{\sqrt{3}}{4}c^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

即$a^2+c^2-b^2=2$，

由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，整理得 $ac\cos B=1$，

则 $\cos B>0$，又 $\sin B=\frac{1}{3}$,

则 $\cos B=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $ac=\frac{1}{\cos B}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$,

则$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{2}}{8}$.

(2) 由正弦定理得：$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,

则$\frac{b^2}{\sin^2 B}=\frac{a}{\sin A}\cdot\frac{c}{\sin C}=\frac{ac}{\sin A\sin C}=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{3}}=\frac{9}{4}$,

则$\frac{b}{\sin B}=\frac{3}{2}$, $b=\frac{3}{2}\sin B=\frac{1}{2}$.

19 、【答案】(1) 47.9；

;

(2) 0.89；

;

(3) 0.0014

;

【解析】(1) 由频率分布直方图得该地区这种疾病患者的平均年龄为：

$\overline{x}=5\times0.001\times10+15\times0.002\times10+25\times0.012\times10+35\times0.017$

$\times10+45\times0.023\times10+55\times0.020\times10+65\times0.017\times10+75\times0.006$

$\times10+85\times0.002\times10=47.9$（岁）.

(2) 该地区一位这种疾病患者的年龄位于区间$[20,70)$的频率为：

$(0.012+0.017+0.023+0.020+0.017)\times10=0.89$，

∴估计该地区一位这种疾病患者的年龄位于区间$[20,70)$的概率为 0.89.

(3) 设从该地区中任选一人，此人的年龄位于区间$[40,50)$为事件 B，

此人患这种疾病为事件 C，

则 $P(C|B)=\frac{P(BC)}{P(B)}=\frac{0.1\%\times0.023\times10}{16\%}\approx0.0014$.

20 、【答案】 (1) 证明见解析

;

(2) $\frac{11}{13}$

;

【解析】 (1) 证明：连接 BO 并延长交 AC 于点 D，连接 OA、PD，

因为 PO 是三棱锥 $P-ABC$ 的高，所以 $PO\perp$平面 ABC，

又 AO、$BO\subset$平面 ABC，所以 $PO\perp AO$、$PO\perp BO$，

又 $PA=PB$，所以$\triangle POA\cong\triangle POB$，所以 $OA=OB$，

所以$\angle OAB=\angle OBA$，又 $AB\perp AC$，即$\angle BAC=90°$，

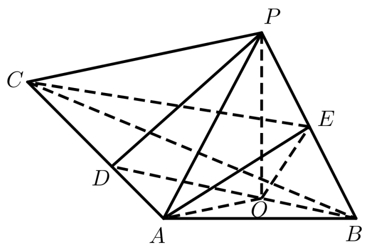
所以$\angle OAB+\angle OAD=90°$，$\angle OBA+\angle ODA=90°$，

所以$\angle ODA=\angle OAD$，所以 $AO=DO$，即 $AO=DO=OB$，

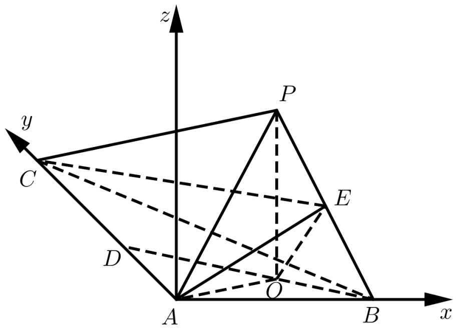
所以 O 为 BD 的中点，又 E 为 PB 的中点，所以 $OE//$PD，

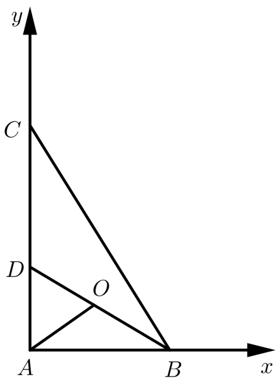
又 $OE\not\subset$平面 PAC，$PD\subset$平面 PAC，

所以 $OE//$平面 PAC.



(2) 解：过点 A 作 $Az//$OP，如图建立空间直角坐标系，因为 $PO=3$，$AP=5$，所以 $OA=\sqrt{AP^2-PO^2}=4$，





又$\angle OBA=\angle OBC=30°$，$BD=2OA=8$，则 $AD=4$，$AB=4\sqrt{3}$，所以 $AC=12$，

所以 $O\left(2\sqrt{3},2,0\right)$，$B\left(4\sqrt{3},0,0\right)$，$P\left(2\sqrt{3},2,3\right)$，$C(0,12,0)$，

所以 $E\left(3\sqrt{3},1,\frac{3}{2}\right)$，

则$\overrightarrow{AE}=\left(3\sqrt{3},1,\frac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{AB}=\left(4\sqrt{3},0,0\right)$，$\overrightarrow{AC}=(0,12,0)$，

设平面 AEB 的法向量为$\overrightarrow{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AE}=3\sqrt{3}x+y+\frac{3}{2}z=0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AB}=4\sqrt{3}x=0\end{cases}$，

令 $z=2$，则 $y=-3$，$x=0$，

所以$\overrightarrow{n}=(0,-3,2)$；

设平面 AEC 的法向量为$\overrightarrow{m}=(a,b,c)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{AE}=3\sqrt{3}a+b+\frac{3}{2}c=0\\ \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{AC}=12b=0\end{cases}$，

令 $a=\sqrt{3}$，则 $c=-6$，$b=0$，

所以$\overrightarrow{m}=\left(\sqrt{3},0,-6\right)$；

所以 $\cos\left\langle\overrightarrow{n},\overrightarrow{m}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{m}}{\left|\overrightarrow{n}\right|\left|\overrightarrow{m}\right|}=\frac{-12}{\sqrt{13}\times\sqrt{39}}=-\frac{4\sqrt{3}}{13}$,

设二面角 $C-AE-B$ 为θ，

由图可知二面角 $C-AE-B$ 为钝二面角，

所以 $\cos\theta=-\frac{4\sqrt{3}}{13}$，所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{11}{13}$,

故二面角 $C-AE-B$ 的正弦值为$\frac{11}{13}$.

21 、【答案】 (1) $x^2-\frac{y^2}{3}=1$

;

(2) 见解析

;

【解析】 (1) ∵右焦点为 $F(2,0)$，∴ $c=2$，

∵渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，∴ $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，

∴ $b=\sqrt{3}a$，∴ $c^2=a^2+b^2=4a^2=4$，

∴ $a=1$，∴ $b=\sqrt{3}$. ∴ C 的方程为：$x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

(2) 由已知得直线 PQ 的斜率存在且不为零，直线 AB 的斜率不为零，

若选由①②推③或选由②③推①：由②成立可知直线 AB 的斜率存在且不为零；

若选①③推②，则 M 为线段 AB 的中点，假若直线 AB 的斜率不存在，

则由双曲线的对称性可知 M 在 x 轴上，即为焦点 F，

此时由对称性可知 P、Q 关于 x 轴对称，从而$x_1=x_2$，与已知不符；

总之，直线 AB 的斜率存在且不为零.

设直线 AB 的斜率为 k，直线 AB 方程为 $y=k(x-2)$，

则条件①M 在 AB 上，等价于$y_0=k(x_0-2)\Leftrightarrow ky_0=k^2(x_0-2)$；

两渐近线的方程合并为 $3x^2-y^2=0$，

联立消去 y 并化简整理得：$\left(k^2-3\right)x^2-4k^2x+4k^2=0$，

$\Delta=16k^4-16k^2(k^2-3)=48k^2>0$，

设 $A(x_3,y_3)$，$B(x_4,y_4)$，线段中点为 $N(x_N,y_N)$，

则$x_N=\frac{x_3+x_4}{2}=\frac{2k^2}{k^2-3},y_N=k(x_N-2)=\frac{6k}{k^2-3}$，

设 $M\left(x_0,y_0\right)$，

则条件③$|AM|=|BM|$等价于$(x_0-x_3)^2+(y_0-y_3)^2=(x_0-x_4)^2+(y_0-y_4)^2$，

移项并利用平方差公式整理得：$(x_3-x_4)[2x_0-(x_3+x_4)]+(y_3-y_4)[2y_0-(y_3+y_4)]=0$，

即$[2x_0-(x_3+x_4)]+\frac{y_3-y_4}{x_3-x_4}[2y_0-(y_3+y_4)]=0$，

即$(x_0-x_N)+k(y_0-y_N)=0$，

即$x_0+ky_0=\frac{8k^2}{k^2-3}$;

由题意知直线 PM 的斜率为$-\sqrt{3}$, 直线 QM 的斜率为$\sqrt{3}$，

$\therefore y_1-y_0=-\sqrt{3}(x_1-x_0),y_2-y_0=\sqrt{3}(x_2-x_0)$,

$\therefore y_1-y_2=-\sqrt{3}(x_1+x_2-2x_0)$，

所以直线 PQ 的斜率 $m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{\sqrt{3}(x_1+x_2-2x_0)}{x_1-x_2}$,

直线 PM:$y=-\sqrt{3}(x-x_0)+y_0$，即 $y=y_0+\sqrt{3}x_0-\sqrt{3}x$，

代入双曲线的方程 $3x^2-y^2-3=0$，

即$(\sqrt{3}x+y)(\sqrt{3}x-y)=3$ 中，得：$(y_0+\sqrt{3}x_0)[2\sqrt{3}x-(y_0+\sqrt{3}x_0)]=3$，

解得 P 的横坐标：$x_1=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{3}{y_0+\sqrt{3}x_0}+y_0+\sqrt{3}x_0\right)$,

同理：$x_2=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{3}{y_0-\sqrt{3}x_0}+y_0-\sqrt{3}x_0\right)$，$\therefore x_1-x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{3y_0}{y_0^2-3x_0^2}+y_0\right),x_1+x_2-2x_0=-\frac{3x_0}{y_0^2-3x_0^2}-x_0$，

$\therefore m=\frac{3x_0}{y_0}$,

$\therefore$条件②$PQ//AB$ 等价于 $m=k\Leftrightarrow ky_0=3x_0$，

综上所述：条件①M 在 AB 上，等价于 $ky_0=k^2(x_0-2)$；条件②$PQ//AB$ 等价于 $ky_0=3x_0$；条件③$|AM|=|BM|$等价于$x_0+ky_0=\frac{8k^2}{k^2-3}$;

选①②推③:由①②解得：$x_0=\frac{2k^2}{k^2-3},\therefore x_0+ky_0=4x_0=\frac{8k^2}{k^2-3},\therefore$③成立；

选①③推②：由①③解得：$x_0=\frac{2k^2}{k^2-3}$，$ky_0=\frac{6k^2}{k^2-3}$，$\therefore ky_0=3x_0$，$\therefore$②成立；

选②③推①：由②③解得：$x_0=\frac{2k^2}{k^2-3}$，$ky_0=\frac{6k^2}{k^2-3}$，$\therefore x_0-2=\frac{6}{k^2-3}$,

$\therefore ky_0=k^2(x_0-2)$，$\therefore$①成立.

22 、【答案】 (1) $f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增.

;

(2) $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$

;

(3) 见解析

;

【解析】(1) 当 $a=1$ 时，$f(x)=(x-1)\mathrm{e}^{x}$，则$f'(x)=x\mathrm{e}^{x}$，当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增.

(2) 设 $h(x)=x\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^{x}+1$，则 $h(0)=0$，$h'(x)=(1+ax)\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^{x}$，设 $g(x)=(1+ax)\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^{x}$，则$g'(x)=\left(2a+a^{2}x\right)\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^{x}$．若 $a>\frac{1}{2}$，则$g'(0)=2a-1>0$，因为$g'(x)$为连续不间断函数，故存在$x_0\in(0,+\infty)$，使得$\forall x\in(0,x_0)$，总有$g'(x)>0$，故 $g(x)$在$(0,x_0)$上为增函数，故 $g(x)>g(0)=0$，故 $h(x)$在$(0,x_0)$上为增函数，故 $h(x)>h(0)=0$，与题设矛盾．若 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$，则$h'(x)=(1+ax)\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^{x}=\mathrm{e}^{ax+\ln(1+ax)}-\mathrm{e}^{x}$，下证：对任意 $x>0$，总有 $\ln(1+x)<x$ 成立，证明：设 $S(x)=\ln(1+x)-x$，故$S'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}<0$，故 $S(x)$在$(0,+\infty)$上为减函数，故 $S(x)<S(0)=0$，即 $\ln(1+x)<x$ 成立．由上述不等式有$\mathrm{e}^{ax+\ln(1+ax)}-\mathrm{e}^{x}<\mathrm{e}^{ax+ax}-\mathrm{e}^{x}=\mathrm{e}^{2ax}-\mathrm{e}^{x}\leqslant 0$，故$h'(x)\leqslant 0$ 总成立，即 $h(x)$在$(0,+\infty)$上为减函数，所以 $h(x)<h(0)=0$.当 $a\leqslant 0$ 时，有$h'(x)=\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^{x}+ax\mathrm{e}^{ax}<1-1+0=0$，所以 $h(x)$在$(0,+\infty)$上为减函数，所以 $h(x)<h(0)=0$.综上，$a\leqslant\frac{1}{2}$，即实数 a 的取值范围是$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

(3) 由(2)得：取 $a=\frac{1}{2}$，则$\forall x>0$，总有 $x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}-\mathrm{e}^{x}+1<0$ 成立，令 $t=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$，则 $t>1,t^{2}=\mathrm{e}^{x},x=2\ln t$，故 $2t\ln t<t^{2}-1$，即 $2\ln t<t-\frac{1}{t}$对任意的 $t>1$ 恒成立，所以对任意的 $n\in\mathbf{N}^{*}$，有 $2\ln\sqrt{\frac{n+1}{n}}<\sqrt{\frac{n+1}{n}}-\sqrt{\frac{n}{n+1}}$，整理得到 $\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{\sqrt{n^{2}+n}}$，故$\frac{1}{\sqrt{1^{2}+1}}+\frac{1}{\sqrt{2^{2}+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^{2}+n}}>\ln 2-\ln 1+\ln 3-\ln 2+\cdots+\ln(n+1)-\ln n=\ln(n+1)$，故不等式成立.