2022年高考真题新高考I卷数学试卷-学生用卷

一、选择题本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、若集合 $M=\{x|\sqrt{x}<4\}$，$N=\{x|3x\geqslant 1\}$，则 $M\cap N=$（　　　　）

A. $\{x|0\leqslant x<2\}$

B. $\left\{x\middle|\frac{1}{3}\leqslant x<2\right\}$

C. $\{x|3\leqslant x<16\}$

D. $\left\{x\middle|\frac{1}{3}\leqslant x<16\right\}$

2、若 $\mathrm{i}(1-\mathrm{z})=1$，则 $z+\bar{z}=$（　　　　）

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

3、在△ ABC 中，点 D 在边 AB 上，$BD=2DA$．记 $\overrightarrow{CA}=\vec{m}$，$\overrightarrow{CD}=\vec{n}$，则 $\overrightarrow{CB}=$（　　　　）

A. $3\vec{m}-2\vec{n}$

B. $-2\vec{m}+3\vec{n}$

C. $3\vec{m}+2\vec{n}$

D. $2\vec{m}+3\vec{n}$

4、南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题，其中一部分水蓄入某水库．已知该水库水位为海拔148.5m时，相应水面的面积为 $140.0\mathrm{km}^2$；水位为海拔157.5m时，相应水面的面积为 $180.0\mathrm{km}^2$，将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台，则该水库水位从海拔148.5m上升到157.5m时，增加的水量约为（$\sqrt{7}\approx 2.65$）（　　　　）

A. $1.0\times 10^9\mathrm{m}^3$

B. $1.2\times 10^9\mathrm{m}^3$

C. $1.4\times 10^9\mathrm{m}^3$

D. $1.6\times 10^9\mathrm{m}^3$

5、从 2 至 8 的 7 个整数中随机取 2 个不同的数，则这 2 个数互质的概率为（　　　　　　　　）

A. $\frac{1}{6}$　　　　B. $\frac{1}{3}$　　　　C. $\frac{1}{2}$　　　　D. $\frac{2}{3}$

6、记函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)+b(\omega>0)$的最小正周期为 T．若$\frac{2\pi}{3}<T<\pi$，且 $y=f(x)$的图像关于点$\left(\frac{3\pi}{2},2\right)$中心对称，则 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=()$

A. 1

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{5}{2}$

D. 3

7、设 $a=0.1\mathrm{e}^{0.1}$，$b=\frac{1}{9}$，$c=-\ln 0.9$，则（　　）．

A. $a<b<c$

B. $c<b<a$

C. $c<a<b$

D. $a<c<b$

8、已知正四棱锥的侧棱长为 l，其各顶点都在同一球面上．若该球的体积为 36π，且 $3\leqslant l\leqslant 3\sqrt{3}$，则该正四棱锥体积的取值范围是（　　）．

A. $\left[18,\frac{81}{4}\right]$

B. $\left[\frac{27}{4},\frac{81}{4}\right]$

C. $\left[\frac{27}{4},\frac{64}{3}\right]$

D. $[18,27]$

二、选择题本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9、已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，则（　　　　　　　　）

A. 直线 BC_1与 DA_1所成的角为 $90°$

B. 直线 BC_1与 CA_1所成的角为 $90°$

C. 直线 BC_1与平面 BB_1D_1D 所成的角为 $45°$

D. 直线 BC_1与平面 $ABCD$ 所成的角为 $45°$

10、已知函数 $f(x)=x^3-x+1$，则（　　　　　　）

A. $f(x)$有两个极值点

B. $f(x)$有三个零点

C. 点$(0,1)$是曲线 $y=f(x)$的对称中心

D. 直线 $y=2x$ 是曲线 $y=f(x)$的切线

11、已知 O 为坐标原点，点 $A(1,1)$在抛物线 $C{:}x^2=2py(p>0)$上，过点 $B(0,-1)$的直线交 C 于 P，Q 两点，则（　　）.

A. C 的准线为 $y=-1$

B. 直线 AB 与 C 相切

C. $|OP|\cdot|OQ|>|OA|^2$

D. $|BP|\cdot|BQ|>|BA|^2$

12、已知函数 $f(x)$及其导函数$f'(x)$的定义域均为 $\mathbf{R}$，记 $g(x)=f'(x)$，若 $f\left(\frac{3}{2}-2x\right)$，$g(2+x)$均为偶函数，则（　　）.

A. $f(0)=0$

B. $g\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

C. $f(-1)=f(4)$

D. $g(-1)=g(2)$

三、填空题本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13、$\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^8$的展开式中$x^2y^6$的系数为________________（用数字作答）.

14、写出与圆$x^2+y^2=1$和$(x-3)^2+(y-4)^2=16$都相切的一条直线的方程为________________________.

15、若曲线$y=(x+a)\mathrm{e}^x$有两条过坐标原点的切线，则a的取值范围是________________________.

16、已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$C$的上顶点为$A$，两个焦点为$F_1$、$F_2$，离心率为$\frac{1}{2}$，过$F_1$且垂直于$AF_2$的直线与$C$交于$D$，$E$两点，$|DE|=6$，则$\triangle ADE$的周长是____________.

四、解答题本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17、记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$a_1=1$,$\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$是公差为$\frac{1}{3}$的等差数列.

(1) 求$\{a_n\}$的通项公式；

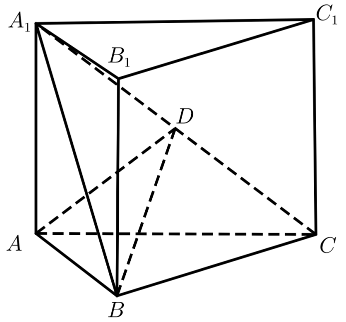
(2) 证明：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2$.

18、记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$.

(1) 若$C=\frac{2\pi}{3}$，求B；

(2) 求$\frac{a^2+b^2}{c^2}$的最小值.

19、如图，直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的体积为4，$\triangle A_1BC$的面积为$2\sqrt{2}$.



(1) 求 A 到平面A_1BC 的距离；

(2) 设 D 为A_1C 的中点，$AA_1=AB$，平面$A_1BC\perp$平面 ABB_1A_1，求二面角 $A-BD-C$ 的正弦值．

20、一医疗团队为研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯（卫生习惯分为良好和不够良好两类）的关系，在已患该疾病的病例中随机调查了 100 例（称为病例组），同时在未患该疾病的人群中随机调查了 100 人（称为对照组），得到如下数据：

	不够良好	良好
病例组	40	60
对照组	10	90

(1) 能否有 99%的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异？

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

$P\left(K^2\geqslant k\right)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

(2) 从该地的人群中任选一人，A 表示事件“选到的人卫生习惯不够良好”，B 表示事件“选到的人患有该疾病”．$\frac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)}$与$\frac{P(B|\bar{A})}{P(\bar{B}|\bar{A})}$的比值是卫生习惯不够良好对患该疾病风险程度的一项度量指标，记该指标为 R.

（ⅰ）证明：$R=\frac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)}\cdot\frac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(A|\bar{B})}$;

（ⅱ）利用该调查数据，给出 $P(A|B),P(A|\bar{B})$的估计值，并利用（ⅰ）的结果给出 R 的估计值.

21、已知点 $A(2,1)$在双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2-1}=1(a>1)$上，直线 l 交 C 于 P、Q 两点，直线 AP，AQ 的斜率之和为 0.

(1) 求 l 的斜率；

(2) 若 $\tan\angle PAQ=2\sqrt{2}$，求$\triangle PAQ$ 的面积.

22、已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}-\mathrm{ax}$ 和 $g(x)=ax-\ln x$ 有相同的最小值.

(1) 求 a；

(2) 证明：存在直线 $y=b$，其与两条曲线 $y=f(x)$和 $y=g(x)$共有三个不同的交点，并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.

1 、【答案】 D;

【解析】 $M=\{x|0\leqslant x<16\}$，$N=\left\{x\left|x\geqslant\frac{1}{3}\right.\right\}$，故 $M\cap N=\left\{x\left|\frac{1}{3}\leqslant x<16\right.\right\}$，故选：D.

2 、【答案】 D;

【解析】 由题设得 $1-z=\frac{1}{\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2}=-\mathrm{i}$，故 $z=1+\mathrm{i}$，所以$\overline{z}=1-\mathrm{i}$，

故 $z+\overline{z}=(1+\mathrm{i})+(1-\mathrm{i})=2$，

故选 D.

3 、【答案】 B;

【解析】 因为点 D 在边 AB 上，$BD=2DA$，所以$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DA}$，

即$\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=2\left(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD}\right)$，

所以$\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{CD}-2\overrightarrow{CA}=3\vec{n}-2\vec{m}=-2\vec{m}+3\vec{n}$.

故选：B.

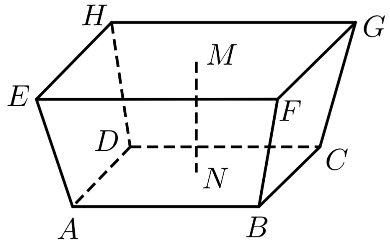
4 、【答案】 C;

【解析】 依题意可知棱台的高为 $MN=157.5-148.5=9(\mathrm{m})$，增加的水量即为棱台的体积 V.

棱台下底面积 $S=140.0\mathrm{km}^2=140\times10^6\mathrm{m}^2$，

上底面积$S'=180.0\mathrm{km}^2=180\times10^6\mathrm{m}^2$，

$\therefore V=\frac{1}{3}h\left(S+S'+\sqrt{SS'}\right)=\frac{1}{3}\times9\times\left(140\times10^6+180\times10^6+\sqrt{140\times180\times10^{12}}\right)=3\times\left(320+60\sqrt{7}\right)\times10^6\approx(96+18\times2.65)\times10^7=1.437\times10^9\approx1.4\times10^9(\mathrm{m}^3)$.



故选：C.

5 、【答案】 D;

【解析】 从 2 至 8 的 7 个整数中随机取 2 个不同的数，共有$C_7^2=21$（种）不同的取法，

若两数不互质，不同的取法有：$(2,4),(2,6),(2,8),(3,6),(4,6),(4,8),(6,8)$，共 7 种，

故所求概率 $P=\frac{21-7}{21}=\frac{2}{3}$.

故选：D．

6 、【答案】 A;

【解析】 由函数的最小正周期 T 满足$\frac{2\pi}{3}<T<\pi$，得$\frac{2\pi}{3}<\frac{2\pi}{\omega}<\pi$，解得 $2<\omega<3$，

又因为函数图象关于点$\left(\frac{3\pi}{2},2\right)$对称，所以$\frac{3\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，且 $b=2$，

所以$\omega=-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}k$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以$\omega=\frac{5}{2}$，$f(x)=\sin\left(\frac{5}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)+2$，

所以 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{\pi}{4}\right)+2=1$．

故选：A．

7 、【答案】 C;

【解析】 ①比较 a，b，

$a-b=\frac{1}{10}e^{\frac{1}{10}}-\frac{1}{9}=\frac{1}{10}e^{\frac{1}{10}}-\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}<0$，

$a<b$，理由是：

方法一：令 $f(x)=xe^x-\frac{x}{1-x}$，$a-b=f\left(\frac{1}{10}\right)$，

$f'(x)=(x+1)e^x-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{(x+1)(x-1)^2e^x-1}{(x-1)^2}$，

令 $g(x)=(x+1)(x-1)^2e^x-1$，

则$g'(x)=\left[(x-1)^2+2(x+1)(x-1)+(x+1)(x-1)^2\right]e^x$

$=x(x-1)(x+3)e^x$，

当 $x\in(0,1)$时，$g'(x)<0$，

$g(0)=0$，

$\therefore$当 $x\in(0,1)$时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$，

$\because f(0)=0$，$\therefore$当 $x\in(0,1)$时，$f(x)<0$，$f\left(\frac{1}{10}\right)<0$，$\therefore a<b$.

方法二：$\ln a-\ln b=\ln\left(0.1\mathrm{e}^{0.1}\right)-\ln\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\ln 0.1+0.1-\ln 0.1+\ln(1-0.1)=0.1+\ln(1-0.1)$，

令 $f(x)=x+\ln(1-x)(0\leqslant x<1)$，则$f'(x)=\frac{-x}{1-x}<0$，

则 $f(x)$在$[0,1)$上单调递减，

$\therefore f(0.1)<f(0)=0$.

$\therefore \ln a-\ln b<0$.

$\therefore a<b$.

②比较 a，c，$a-c=\frac{1}{10}\mathrm{e}^{\frac{1}{10}}+\ln\frac{9}{10}=\frac{1}{10}\mathrm{e}^{\frac{1}{10}}+\ln\left(1-\frac{1}{10}\right)>0$，

$a>c$，理由是：

令 $m(x)=x\mathrm{e}^{x}+\ln(1-x)$，$0\leqslant x<0.4$，

则$m'(x)=(x+1)\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{x-1}=\frac{\left(x^{2}-1\right)\mathrm{e}^{x}+1}{x-1}$，

令 $n(x)=\left(x^{2}-1\right)\mathrm{e}^{x}+1$，$n'(x)=\left(x^{2}+2x-1\right)\mathrm{e}^{x}$，

当 $x\in(0,0.4)$时，$n'(x)<0$，

$\because n(0)=0$，

$\therefore$当 $x\in(0,0.4)$时，$n(x)<0$，$m'(x)>0$，

$\because m(0)=0$，

$\therefore$当 $x\in(0,0.4)$时，$m(x)>0$.

$\therefore m(0.1)>0$.

$\therefore a>c$.

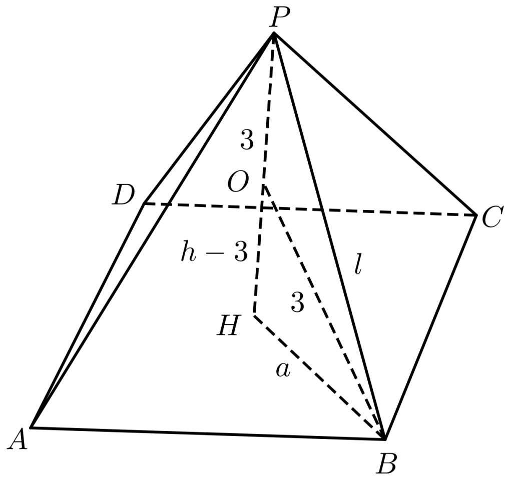
综上，$c<a<b$.

故选 C.

8 、【答案】 C;

【解析】 设球的半径为 R，则$\frac{4}{3}\pi R^{3}=36\pi$，解得 $R=3$.

如图所示，设正四棱锥的底面中心为 H，连接 BH，PH，设 $BH=a$，$PH=h$，



则易知$h^2+a^2=l^2$，①

且$(h-3)^2+a^2=9$，②

联立①②，解得$l^2=6h$，$a^2=6h-h^2$，

所以 $h=\frac{l^2}{6}\in\left[\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right]$，

所以$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\times\frac{2a\times2a}{2}\times h=\frac{2}{3}(-h^3+6h^2)$，

令 $f(h)=\frac{2}{3}(-h^3+6h^2)$，则$f'(h)=\frac{2}{3}\times(-3h^2+12h)=-2h(h-4)$，

易知 $f(h)_{max}=f(4)=\frac{64}{3}$，而 $f(h)_{min}=f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{27}{4}$.

综上可得，该正四棱锥体积的取值范围是$\left[\frac{27}{4},\frac{64}{3}\right]$.

故选 C.

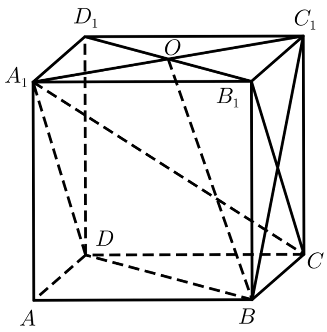
9 、【答案】 A;B;D;

【解析】 如图，连接B_1C，因为 $DA_1//B_1C$，

所以直线 BC_1与B_1C 所成的角即为直线 BC_1与 DA_1所成的角，

因为四边形 BB_1C_1C 为正方形，则$B_1C\perp BC_1$，

故直线 BC_1与 DA_1所成的角为 90°，A 正确；



连接A_1C，因为$A_1B_1 \perp$平面 BB_1C_1C，$BC_1 \subset$平面 BB_1C_1C，则$A_1B_1 \perp BC_1$，

因为$B_1C \perp BC_1$，$A_1B_1 \cap B_1C = B_1$，

所以 $BC_1 \perp$平面A_1B_1C，

又$A_1C \subset$平面A_1B_1C，

所以 $BC_1 \perp CA_1$，所以直线 BC_1与 CA_1所成的角为 90°，故 B 正确；

连接A_1C_1，设$A_1C_1 \cap B_1D_1 = O$，连接 BO，

因为 $BB_1 \perp$平面$A_1B_1C_1D_1$，$C_1O \subset$平面$A_1B_1C_1D_1$，则$C_1O \perp B_1B$，

因为$C_1O \perp B_1D_1$，$B_1D_1 \cap B_1B = B_1$，

所以$C_1O \perp$平面 BB_1D_1D，

所以$\angle C_1BO$ 为直线 BC_1与平面 BB_1D_1D 所成的角，

设正方体棱长为 1，则$C_1O = \frac{\sqrt{2}}{2}$，$BC_1 = \sqrt{2}$，$\sin\angle C_1BO = \frac{C_1O}{BC_1} = \frac{1}{2}$，

所以直线 BC_1与平面 BB_1D_1D 所成的角为$30°$，故 C 错误；

因为$C_1C \perp$平面 $ABCD$，所以$\angle C_1BC$ 为直线 BC_1与平面 $ABCD$ 所成的角，易得$\angle C_1BC = 45°$，故 D 正确.

故选：ABD.

10 、【答案】 A;C;

【解析】 由题意得，$f'(x) = 3x^2 - 1$，

令$f'(x) > 0$ 得 $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$或 $x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$,

令$f'(x) < 0$ 得$-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以 $f(x)$在$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$上单调递减，在$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$上单调递增，

所以 $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$是极值点，故 A 正确；

因为 $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=1+\frac{2\sqrt{3}}{9}>0$，$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=1-\frac{2\sqrt{3}}{9}>0$，$f(-2)=-5<0$，

所以函数 $f(x)$在$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$上有一个零点，

当 $x\geqslant-\frac{\sqrt{3}}{3}$时，$f(x)\geqslant f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)>0$，即函数 $f(x)$在$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$上无零点，

综上所述，函数 $f(x)$只有一个零点，故 B 错误；

令 $h(x)=x^3-x$，该函数的定义域为 $\mathbf{R}$，$h(-x)=(-x)^3-(-x)=-x^3+x=-h(x)$，则 $h(x)$是奇函数，$(0,0)$是 $h(x)$图象的对称中心，将 $h(x)$的图象向上移动一个单位长度得到 $f(x)$的图象，

所以点$(0,1)$是曲线 $y=f(x)$的对称中心，故 C 正确；

令$f'(x)=3x^2-1=2$，可得 $x=\pm1$，

又 $f(1)=f(-1)=1$，当切点为$(1,1)$时，切线方程为 $y=2x-1$，

当切点为$(-1,1)$时，切线方程为 $y=2x+3$，故 D 错误．故选：AC.

11 、【答案】 B;C;D;

【解析】 由题意可知：$1=2p$，所以抛物线 $C:x^2=y$，

故 C 的准线为 $y=-\frac{1}{4}$ ，故 A 错误；

由$y'=2x$ 得曲线 C 在点 $A(1,1)$处的切线斜率为 2，

所以切线方程为 $y=2x-1$，故直线 AB 与 C 相切，故 B 正确；

过点 $B(0,-1)$的直线设为 $y=kx-1$，交 C 于 P，Q 两点的坐标分别设为 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

联立直线与 C 的方程可得$\begin{cases}x^2=y\\y=kx-1\end{cases}\Rightarrow x^2-kx+1=0$，

所以有$x_1+x_2=k$，$x_1x_2=1$，

且$\Delta=k^2-4>0$，即$k^2>4$，进一步可得$y_1+y_2=k^2-2$，$y_1y_2=1$，

此时$|OP|\cdot|OQ|=\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}=\sqrt{(y_1+y_1^2)(y_2+y_2^2)}=\sqrt{y_1y_2(y_1y_2+y_1+y_2+1)}$

$=\sqrt{k^2}>2$.

又$|OA|^2=2$，所以 C 正确；

$|BP|\cdot|BQ|=\vec{BP}\cdot\vec{BQ}=(x_1,y_1+1)\cdot(x_2,y_2+1)=x_1x_2+y_1y_2+y_1+y_2+1=k^2+1>5$，

又$|BA|^2=5$，故 D 正确.

故选 BCD.

12 、【答案】 B;C;

【解析】 因为$f\left(\frac{3}{2}-2x\right)$是偶函数，所以$f(x)$的图象关于直线$x=\frac{3}{2}$对称，

所以$f(-1)=f(4)$，故 C 选项正确，

因为$g(2+x)$为偶函数，

所以$g(x)$的图象关于直线$x=2$对称，

再结合$g(x)=f'(x)$，可知$f(x)$的图象关于点$(2,0)$对称，

根据$f(x)$的图象关于直线$x=\frac{3}{2}$对称可知，$g(x)$的图象关于点$\left(\frac{3}{2},0\right)$对称.

所以$g(x)$的周期为$4\left(2-\frac{3}{2}\right)=2$，

所以 $g\left(\frac{3}{2}-2\right)=0\Rightarrow g\left(-\frac{1}{2}\right)=0$， 故 B 选项正确；

令$f(x)=1$，显然满足所有条件，故 A 选项错误；

再令$f(x)=-\sin\pi x$，

则$f\left(\frac{3}{2}-2x\right)=\cos 2\pi x$， $g(x)=f'(x)=-\pi\cos\pi x$，

所以$g(x+2)=-\pi\cos\pi x$，也满足条件；

所以$g(-1)=-\pi\cos(-\pi)=\pi$，$g(2)=-\pi\cos(2\pi)=-\pi$，故 D 选项错误；

故选：BC.

13 、【答案】 -28;

【解析】 因为$\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^8=(x+y)^8-\frac{y}{x}(x+y)^8$，

所以$\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^8$的展开式中含$x^2y^6$的项为$\mathrm{C}_8^6x^2y^6-\frac{y}{x}\mathrm{C}_8^5x^3y^5=-28x^2y^6$，

所以$\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^8$的展开式中$x^2y^6$的系数为$-28$.

故答案为：-28.

14 、【答案】 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$或$y=\frac{7}{24}x-\frac{25}{24}$或$x=-1$;

【解析】 圆$x^2+y^2=1$的圆心为$O(0,0)$，半径为 1，

圆$(x-3)^2+(y-4)^2=16$的圆心为$O_1(3,4)$，半径为 4，

两圆圆心距为$\sqrt{3^2+4^2}=5$，等于两圆半径之和，故两圆外切，

如图，当切线为 l 时，因为$k_{OO_1}=\frac{4}{3}$，所以$k_l=-\frac{3}{4}$，

设直线 l 的方程为 $y=-\frac{3}{4}x+t(t>0)$，点 O 到 l 的距离 $d=\frac{|t|}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}}=1$，解得 $t=\frac{5}{4}$，

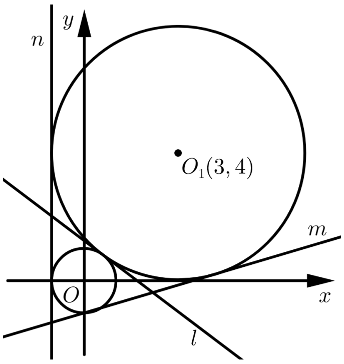
所以 l 的方程为 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$，

当切线为 m 时，设直线方程为 $kx+y+p=0$，其中 $p>0$，$k<0$，

由题意$\begin{cases}\frac{|p|}{\sqrt{1+k^2}}=1\\ \frac{|3k+4+p|}{\sqrt{1+k^2}}=4\end{cases}$，解得$\begin{cases}k=-\frac{7}{24}\\ p=\frac{25}{24}\end{cases}$，所以 m 的方程为 $y=\frac{7}{24}x-\frac{25}{24}$，

当切线为 n 时，易知切线方程为 $x=-1$，

故答案为：$y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$或 $y=\frac{7}{24}x-\frac{25}{24}$或 $x=-1$.



15 、【答案】 $(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$;

【解析】 ∵$y=(x+a)e^x$，

∴$y'=(x+1+a)e^x$，

设切点为(x_0,y_0)，则$y_0=(x_0+a)e^{x_0}$，

∴切线斜率 $k=(x_0+1+a)e^{x_0}$，

∴切线方程为：$y-(x_0+a)e^{x_0}=(x_0+1+a)e^{x_0}(x-x_0)$，

∵切线过原点，

∴$-(x_0+a)e^{x_0}=(x_0+1+a)e^{x_0}(-x_0)$，整理得：$x_0^2+ax_0-a=0$，

∵切线有两条，

$\therefore \Delta = a^2 + 4a > 0$，解得 $a < -4$ 或 $a > 0$，

$\therefore a$ 的取值范围是$(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$，

故答案为：$(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$.

16 、【答案】 13;

【解析】 方法一 ：连接 AF_1，由$\begin{cases} F_1F_2 = 2c \\ AF_2 = a = 2c \end{cases} \Rightarrow \triangle AF_1F_2$为等边三角形，

所以$\begin{cases} AE = EF_2 \\ AD = DF_2 \end{cases} \Rightarrow l_{\triangle EDF_2} = 4a$，

因为$\begin{cases} DF_1 = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - e\cos 30^\circ}, \\ EF_1 = \frac{a}{1 + e\cos 30^\circ} \end{cases}$

所以 $DE = DF_1 + EF_1 = 6$，

$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow 3c^2 = b^2 \Rightarrow b = \sqrt{3}c$ 且 $a = 2c$，

所以 $c = \frac{13}{8} \Rightarrow a = \frac{13}{4}$，所以$l_{\triangle ADE} = l_{\triangle EDF_2} = 13$.

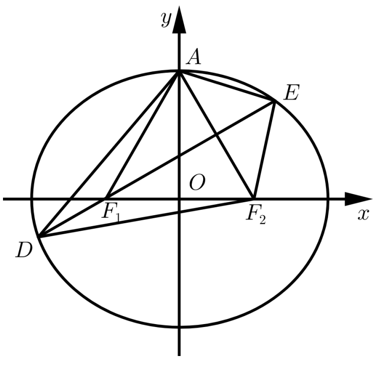
方法二 ：椭圆的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$,

$\therefore a = 2c$.

$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 3c^2$.

∴椭圆的方程为$\frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1$，即 $3x^2 + 4y^2 - 12c^2 = 0$.

不妨设左焦点为F_1，右焦点为F_2，如图所示，



$\because AF_2 = a$，$OF_2 = c$，$a = 2c$，

$\therefore F_1F_2 = AF_2$，$\angle AF_2O = \frac{\pi}{3}$.

$\therefore\triangle AF_1F_2$为正三角形.

过F_1且垂直于 AF_2的直线与 C 交于 D，E 两点，DE 为线段 AF_2的垂直平分线，

$\therefore$直线 DE 的斜率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，斜率倒数为$\sqrt{3}$，直线 DE 的方程：$x=\sqrt{3}y-c$，

代入椭圆方程 $3x^2+4y^2-12c^2=0$，

整理化简得 $13y^2-6\sqrt{3}cy-9c^2=0$.

判别式$\Delta=(-6\sqrt{3}c)^2+4\times13\times9c^2=6^2\times16\times c^2$，

$\therefore|DE|=\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}|y_1-y_2|=2\times\frac{\sqrt{\Delta}}{13}=2\times\frac{6\times4\times c}{13}=6$·

$\therefore c=\frac{13}{8}$，$\therefore a=2c=\frac{13}{4}$.

$\because DE$ 为线段 AF_2的垂直平分线，根据对称性，$AD=DF_2$，$AE=EF_2$，

$\therefore\triangle ADE$ 的周长等于$\triangle F_2DE$ 的周长，利用椭圆的定义得到$\triangle F_2DE$ 周长为

$|DF_2|+|EF_2|+|DE|=|DF_2|+|EF_2|+|DF_1|+|EF_1|=|DF_1|+|DF_2|$

$+|EF_1|+|EF_2|=2a+2a=4a=13$.

故答案为：13.

17 、【答案】 (1) $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$

;

(2) 见解析

;

【解析】 (1) $\because a_1=1$，$\therefore S_1=a_1=1$，$\therefore\frac{S_1}{a_1}=1$，

又$\because\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$是公差为$\frac{1}{3}$的等差数列，

$\therefore\frac{S_n}{a_n}=1+\frac{1}{3}(n-1)=\frac{n+2}{3}$,

$\therefore S_n=\frac{(n+2)a_n}{3}$,

$\therefore$当 $n\geqslant2$ 时，$S_{n-1}=\frac{(n+1)a_{n-1}}{3}$,

$\therefore a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{(n+2)a_n}{3}-\frac{(n+1)a_{n-1}}{3}$,

整理得$(n-1)a_n=(n+1)a_{n-1}$，

即$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$,

$\therefore a_n=a_1\times\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\frac{a_n}{a_{n-1}}=1\times\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\cdots\times\frac{n}{n-2}\times\frac{n+1}{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}$,

显然对于 $n=1$ 也成立,

$\therefore\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

(2) $\frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,

$\therefore\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<2$.

18 、【答案】 (1) $\frac{\pi}{6}$

;

(2) $4\sqrt{2}-5$.

;

【解析】 (1) 因为$\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}=\frac{2\sin B\cos B}{2\cos^2 B}=\frac{\sin B}{\cos B}$,

即 $\sin B=\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos(A+B)=-\cos C=\frac{1}{2}$,

而 $0<B<\frac{\pi}{3}$, 所以 $B=\frac{\pi}{6}$.

(2) 由 (1) 知, $\sin B=-\cos C>0$, 所以$\frac{\pi}{2}<C<\pi$, $0<B<\frac{\pi}{2}$,

而 $\sin B=-\cos C=\sin\left(C-\frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $C=\frac{\pi}{2}+B$,

即有 $A=\frac{\pi}{2}-2B$. 所以$\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 C}=\frac{\cos^2 2B+1-\cos^2 B}{\cos^2 B}=\frac{\left(2\cos^2 B-1\right)^2+1-\cos^2 B}{\cos^2 B}=4\cos^2 B+\frac{2}{\cos^2 B}-5\geqslant 2\sqrt{8}-5=4\sqrt{2}-5$.

当且仅当$\cos^2 B=\frac{\sqrt{2}}{2}$时取等号, 所以$\frac{a^2+b^2}{c^2}$的最小值为 $4\sqrt{2}-5$.

19 、【答案】 (1) $\sqrt{2}$

;

(2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

;

【解析】 (1) 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$中, 设点 A 到平面A_1BC 的距离为 h, 则$V_{A-A_1BC}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1BC}\cdot h=\frac{2\sqrt{2}}{3}h=V_{A_1-ABC}$

$=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot A_1A=\frac{1}{3}V_{ABC-A_1B_1C_1}=\frac{4}{3}$，解得 $h=\sqrt{2}$，

所以点 A 到平面A_1BC 的距离为$\sqrt{2}$.

(2) 取A_1B 的中点 E，连接 AE，

因为 $AA_1=AB$，所以 $AE\perp A_1B$，

又平面$A_1BC\perp$平面 ABB_1A_1，平面$A_1BC\cap$平面 $ABB_1A_1=A_1B$，且 $AE\subset$平面 ABB_1A_1，

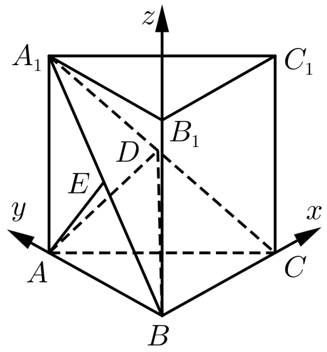
所以 $AE\perp$平面A_1BC，

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$中，$BB_1\perp$平面 ABC，

由 $BC\subset$平面A_1BC，$BC\subset$平面 ABC，可得 $AE\perp BC$，$BB_1\perp BC$，又 $AE,BB_1\subset$平面 ABB_1A_1且相交，

所以 $BC\perp$平面 ABB_1A_1，

所以 BC,BA,BB_1两两垂直，以 B 为原点，分别以 BC、BA、B_1B 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系，如图，



由 (1) 得 $AE=\sqrt{2}$，所以 $AA_1=AB=2$，$A_1B=2\sqrt{2}$，

所以 $BC=2$，则 $A(0,2,0),A_1(0,2,2),B(0,0,0),C(2,0,0)$，

所以A_1C 的中点 $D(1,1,1)$，

则$\overrightarrow{BD}=(1,1,1)$，$\overrightarrow{BA}=(0,2,0),\overrightarrow{BC}=(2,0,0)$，

设平面 ABD 的法向量为$\overrightarrow{m}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{BD}=x+y+z=0\\ \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{BA}=2y=0\end{cases}$，可取$\overrightarrow{m}=(1,0,-1)$，

设平面 BDC 的法向量为$\overrightarrow{n}=(a,b,c)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BD}=a+b+c=0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BC}=2a=0\end{cases}$，可取$\overrightarrow{n}=(0,1,-1)$，则

$\cos\left\langle\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{m}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n}\right|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$,

所以二面角 $A-BD-C$ 的正弦值为$\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

20 、【答案】 (1) 见解析

;

(2) （i）证明见解析；

（ii）$R=6$；

;

【解析】 (1) 由已知得列联表为：

	不够良好	良好	合计
病例组	40	60	100
对照组	10	90	100
合计	50	150	200

所以$K^2=\frac{200\times(40\times90-60\times10)^2}{100\times100\times50\times150}=24$.

又 $P(K^2\geqslant6.635)=0.01$，$24>6.635$，

所以有 99%的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异.

(2) (i)因为 $R=\frac{P(B|A)}{P(\overline{B}|A)}\cdot\frac{P(\overline{B}|\overline{A})}{P(B|\overline{A})}=\frac{P(AB)}{P(A)}\cdot\frac{P(A)}{P(A\overline{B})}\cdot\frac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{A})}\cdot\frac{P(\overline{A})}{P(\overline{A}B)}$

$=\frac{P(AB)\cdot P(\overline{A}\overline{B})}{P(A\overline{B})\cdot P(\overline{A}B)}$

$=\frac{P(AB)}{P(B)}\cdot\frac{P(B)}{P(\overline{A}B)}\cdot\frac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{B})}\cdot\frac{P(\overline{B})}{P(A\overline{B})}$

$=\frac{P(A|B)}{P(\overline{A}|B)}\cdot\frac{P(\overline{A}|\overline{B})}{P(A|\overline{B})}$,

所以 $R=\frac{P(A|B)}{P(\overline{A}|B)}\cdot\frac{P(\overline{A}|\overline{B})}{P(A|\overline{B})}$,

(ii)由已知 $P(A|B)=\frac{40}{100}$，$P(A|\overline{B})=\frac{10}{100}$,

又 $P(\overline{A}|B)=\frac{60}{100}$，$P(\overline{A}|\overline{B})=\frac{90}{100}$,

所以 $R=\frac{P(A|B)}{P(\overline{A}|B)}\cdot\frac{P(\overline{A}|\overline{B})}{P(A|\overline{B})}=6$.

21 、【答案】 (1) -1.

;

(2) $\frac{16\sqrt{2}}{9}$.

;

【解析】 (1) 代入 $A(2,1)$，$\frac{4}{a^2}-\frac{1}{a^2-1}=1$，解得$a^2=2$，

$C:\frac{x^2}{2}-y^2=1$.

设直线 $l:y=kx+m$，

联立得$(2k^2-1)x^2+4kmx+2m^2+2=0$，$\Delta=8(m^2-2k^2+1)>0$，

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，令$x_1<x_2$，

则$x_1+x_2=\frac{-4km}{2k^2-1}$，$x_1x_2=\frac{2m^2+2}{2k^2-1}$，

$y_1+y_2=\frac{-2m}{2k^2-1}$，$y_1y_2=\frac{2k^2-m^2}{2k^2-1}$，

$x_1y_2+x_2y_1=\frac{4k}{2k^2-1}$，

$k_{AP}+k_{AQ}=\frac{y_1-1}{x_1-2}+\frac{y_2-1}{x_2-2}=\frac{x_1y_2+x_2y_1-2(y_1+y_2)-(x_1+x_2)+4}{(x_1-2)(x_2-2)}=0$，

化简得 $2k^2+(m+1)k+m-1=0$，

即$(k+1)(2k+m-1)=0$，

解得 $k=-1$ 或 $k=\frac{1-m}{2}$，

当 $k=\frac{1-m}{2}$时，$l:y=\frac{1-m}{2}x+m$ 恒过 $A(2,1)$，舍去，

$\therefore k=-1$，$\therefore l$ 的斜率为-1.

(2) $\because k=-1$，

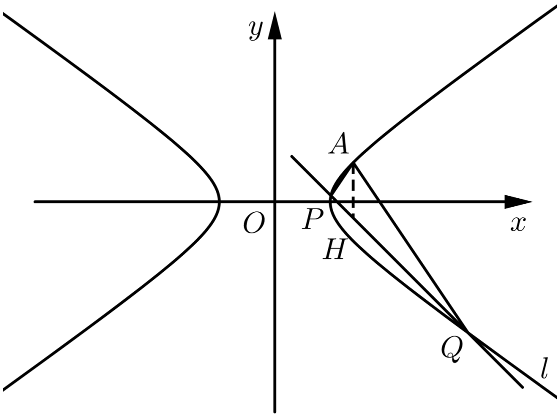
$\therefore$联立后$x^2-4mx+2m^2+2=0$，

$\Delta=8m^2-8$，

$x_1+x_2=4m$，$x_1x_2=2m^2+2$，

$y_1+y_2=-2m$，$y_1y_2=2-m^2$，

过 A 作 $AH\perp x$ 轴，交 PQ 于 H.



$\because k_{AP}+k_{AQ}=0$，

$\therefore \angle PAH=\angle QAH$.

$\because \tan\angle PAQ=\tan 2\angle PAH=2\sqrt{2}$，

$\therefore \tan\angle PAH=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{x_1-2}{y_1-1}=-\frac{x_2-2}{y_2-1}$,

$\therefore \frac{x_1-2}{y_1-1}\cdot\frac{x_2-2}{y_2-1}=-\frac{1}{2}$,

$\frac{2m^2-8m+6}{-m^2+2m+3}=\frac{(m-3)(2m-2)}{(-m+3)(m+1)}=-\frac{1}{2}$,

$\frac{2m-2}{m+1}=\frac{1}{2}$,

解得 $m=\frac{5}{3}$.

$\therefore l{:}y=-x+\frac{5}{3}$,

$\therefore |PQ|=\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{m^2-1}=\frac{16}{3}$,

$\therefore A$ 到直线 PQ 的距离 $d=\frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$\therefore \triangle PAQ$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|PQ|d=\frac{16\sqrt{2}}{9}$.

22 、【答案】 (1) 1.

;

(2) 证明见解析.

;

【解析】 (1) $f'(x)=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{a}$，$g'(x)=a-\frac{1}{x}$,

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，$g'(x)<0$ 恒成立，$f(x)$，$g(x)$均无最小值；

当 $a>0$ 时，$f(x)_{min}=f(\ln a)=a-a\ln a$，

$g(x)_{min}=g\left(\frac{1}{a}\right)=1+\ln a$，

$\therefore a-a\ln a=1+\ln a$，

$\therefore \ln a-\frac{a-1}{a+1}=0$.

令 $h(x)=\ln x-\frac{x-1}{x+1}$,

则$h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+1}{x(x+1)^2}>0$，

$\therefore h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

又 $h(1)=0$，

$\therefore$当 $x<1$ 时，$h(x)<0$；当 $x>1$ 时，$h(x)>0$.

$\because h(a)=0$，

$\therefore a=1$.

(2) 令 $f(x)=g(x)$，即$\mathrm{e}^{\mathrm{x}}-\mathrm{x}=\mathrm{x}-\ln\mathrm{x}$，$\mathrm{e}^{\mathrm{x}}+\ln\mathrm{x}-2\mathrm{x}=0$，

令 $F(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}+\ln\mathrm{x}-2\mathrm{x}$，$F'(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}+\frac{1}{\mathrm{x}}-2$，

当 $x\in(0,1)$时，$F'(x)>1+1-2=0$，

$\therefore F(x)$单调递增，

又 $F(\mathrm{e}^{-2})=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-2}}-2-2\mathrm{e}^{-2}<\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-2<0$，$F(1)=\mathrm{e}-2>0$，

$\therefore \exists x_0\in(0,1)$，$F(x_0)=0$，即$\mathrm{e}^{\mathrm{x}_0}-\mathrm{x}_0=\mathrm{x}_0-\ln\mathrm{x}_0$.

令 $b=\mathrm{e}^{\mathrm{x}_0}-\mathrm{x}_0=\mathrm{x}_0-\ln\mathrm{x}_0$.

下面证明 $y=b$ 符合条件.

令$x_1=\ln x_0<0$，

则$\mathrm{e}^{\mathrm{x}_0}-\mathrm{x}_0=\mathrm{x}_0-\ln\mathrm{x}_0=\mathrm{e}^{\mathrm{x}_1}-\mathrm{x}_1$，

$\therefore y=b$ 与 $f(x)$有两交点x_0，x_1.

令$x_2=\mathrm{e}^{\mathrm{x}_0}>1$，

则$x_0-\ln x_0=\mathrm{e}^{\mathrm{x}_0}-\mathrm{x}_0=\mathrm{x}_2-\ln\mathrm{x}_2$，

$\therefore y=b$ 与 $g(x)$有两交点x_0，x_2，

于是 $y=b$ 与 $f(x)$，$g(x)$共有 3 个交点，且$x_1<0<x_0<1<x_2$，

又$x_1+x_2=\ln x_0+\mathrm{e}^{\mathrm{x}_0}=2\mathrm{x}_0$，

$\therefore$从左到右的三交点横坐标成等差数列.