2022年高考真题北京卷数学试卷-学生用卷

一、选择题（共10小题，每小题4分，共40分．在每小题列出的的四个选项中，选出符合题目要求的一项．）

1、已知全集 $U=\{x|-3<x<3\}$，集合 $A=\{x|-2<x\leqslant 1\}$，则 $\complement_U A=$（　　）

A. $(-2,1]$

B. $(-3,-2)\cup[1,3)$

C. $[-2,1)$

D. $(-3,-2]\cup(1,3)$

2、若复数 z 满足 $\mathrm{i}\cdot \mathrm{z}=3-4\mathrm{i}$，则 $|z|=$（　　）

A. 1　　B. 5　　C. 7　　D. 25

3、若直线 $2x+y-1=0$ 是圆 $(x-a)^2+y^2=1$ 的一条对称轴，则 $a=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. -1

4、已知函数 $f(x)=\frac{1}{1+2^x}$，则对任意实数 x，有（　　）

A. $f(-x)+f(x)=0$

B. $f(-x)-f(x)=0$

C. $f(-x)+f(x)=1$

D. $f(-x)-f(x)=\frac{1}{3}$

5、已知函数 $f(x)=\cos^2x-\sin^2x$，则（　　）

A. $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递减

B. $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{12}\right)$ 上单调递增

C. $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递减

D. $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{12}\right)$ 上单调递增

6、设 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的无穷等差数列，则 “$\{a_n\}$ 为递增数列”是“存在正整数 N_0，当 $n > N_0$ 时，$a_n > 0$” 的（　　）

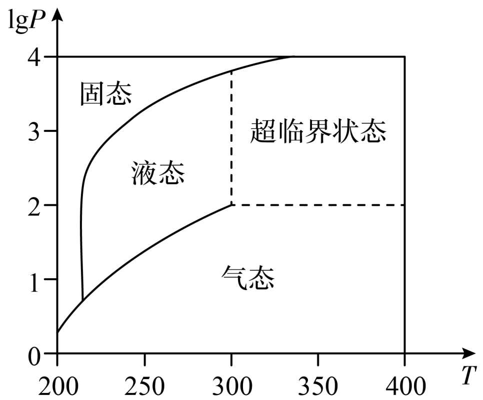
A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

7、在北京冬奥会上，国家速滑馆“冰丝带”使用高效环保的二氧化碳跨临界直冷制冰技术，为实现绿色冬奥作出了贡献．如图描述了一定条件下二氧化碳所处的状态与 T 和 $\lg P$ 的关系，其中 T 表示温度，单位是 K；P 表示压强，单位是 bar．下列结论中正确的是（　　）



A. 当 $T=220$，$P=1026$ 时，二氧化碳处于液态

B. 当 $T=270$，$P=128$ 时，二氧化碳处于气态

C. 当 $T=300$，$P=9987$ 时，二氧化碳处于超临界状态

D. 当 $T=360$，$P=729$ 时，二氧化碳处于超临界状态

8、若 $(2x-1)^4=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，则 $a_0+a_2+a_4=$（　　）

A. 40　　B. 41　　C. -40　　D. -41

9、已知正三棱锥 $P-ABC$ 的六条棱长均为 6，S 是 $\triangle ABC$ 及其内部的点构成的集合．设集合 $T=\{Q\in S|PQ\leqslant 5\}$，则 T 表示的区域的面积为（　　）

A. $\frac{3\pi}{4}$

B. π

C. 2π

D. 3π

10、在$\triangle ABC$中，$AC=3$，$BC=4$，$\angle C=90°$．P为$\triangle ABC$所在平面内的动点，且 $PC=1$，则 $\vec{PA}\cdot\vec{PB}$ 的取值范围是（　　　　）

A. $[-5,3]$　　B. $[-3,5]$　　C. $[-6,4]$　　D. $[-4,6]$

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．）

11、函数 $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{1-x}$ 的定义域是 ________．

12、已知双曲线 $y^2+\frac{x^2}{m}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，则 $m=$ ________．

13、若函数 $f(x)=A\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的一个零点为 $\frac{\pi}{3}$，则 $A=$ ________；$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=$ ________．

14、设函数 $f(x)=\begin{cases}-ax+1,x<a\\(x-2)^2,x\geqslant a\end{cases}$，若 $f(x)$ 存在最小值，则 a 的一个取值为 ________；a 的最大值为 ________．

15、已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数，其前 n 项和S_n满足$a_n\cdot S_n=9(n=1,2,\cdots)$．给出下列四个结论：

①$\{a_n\}$的第 2 项小于 3；

②$\{a_n\}$为等比数列；

③$\{a_n\}$为递减数列；

④$\{a_n\}$中存在小于$\frac{1}{100}$的项．

其中所有正确结论的序号是 ________．

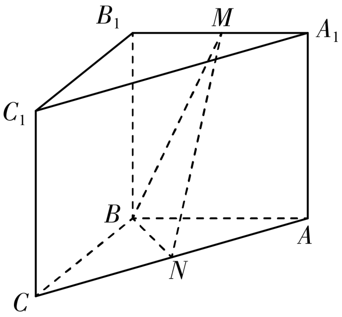
三、解答题（共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．）

16、在$\triangle ABC$中，$\sin 2C=\sqrt{3}\sin C$．

(1) 求 $\angle C$；

(2) 若 $b=6$，且 $\triangle ABC$ 的面积为 $6\sqrt{3}$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长.

17、如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 BCC_1B_1 为正方形，平面 $BCC_1B_1\perp$ 平面 ABB_1A_1， $AB=BC=2$， M， N 分别为 A_1B_1， AC 的中点.



(1) 求证：$MN//$ 平面 BCC_1B_1.

(2) 再从条件 ①、条件 ② 这两个条件中选择一个作为已知，求直线 AB 与平面 BMN 所成角的正弦值.

条件 ①：$AB\perp MN$；

条件 ②：$BM=MN$.

18、在校运动会上，只有甲、乙、丙三名同学参加铅球比赛，比赛成绩达到 9.50m 以上（含 9.50m）的同学将获得优秀奖．为预测获得优秀奖的人数及冠军得主，收集了甲、乙、丙以往的比赛成绩，并整理得到如下数据（单位：m）：

甲：9.80，9.70，9.55，9.54，9.48，9.42，9.40，9.35，9.30，9.25；

乙：9.78，9.56，9.51，9.36，9.32，9.23；

丙：9.85，9.65，9.20，9.16.

假设用频率估计概率，且甲、乙、丙的比赛成绩相互独立.

(1) 估计甲在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的概率；

(2) 设 X 是甲、乙、丙在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的总人数，估计 X 的数学期望 EX；

(3) 在校运动会铅球比赛中，甲、乙、丙谁获得冠军的概率估计值最大？（结论不要求证明）

19、已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点为 $A(0,1)$，焦距为 $2\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 E 的方程；

(2) 过点 $P(-2,1)$ 作斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 B，C，直线 AB，AC 分别与 x 轴交于点 M，N，当 $|MN|=2$ 时，求 k 的值.

20、已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\ln(1+\mathrm{x})$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

(2) 设 $g(x)=f'(x)$，讨论函数 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的单调性；

(3) 证明：对任意的 s，$t\in(0,+\infty)$，有 $f(s+t)>f(s)+f(t)$.

21、已知 Q：a_1，a_2，⋯，a_k 为有穷整数数列．给定正整数 m，若对任意的 $n\in\{1$，2，⋯，$m\}$，在 Q 中存在 a_i，a_{i+1}，a_{i+2}，⋯，$a_{i+j}(j\geqslant 0)$，使得 $a_i+a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_{i+j}=n$，则称 Q 为 $m-$ 连续可表数列.

(1) 判断 Q:2，1，4 是否为 $5-$ 连续可表数列？是否为 $6-$ 连续可表数列？说明理由；

(2) 若 Q:a_1，a_2，⋯，a_k 为 $8-$ 连续可表数列，求证：k 的最小值为 4；

(3) 若 Q:a_1，a_2，⋯，a_k 为 $20-$ 连续可表数列，且 $a_1+a_2+\cdots+a_k<20$，求证：$k\geqslant 7$.

1 、【答案】 D;

【解析】 由补集的定义可知：$\complement_U A=\{x|-3<x\leqslant-2$ 或 $1<x<3\}$，

即 $\complement_U A=(-3,-2]\cup(1,3)$，

故选：D.

2 、【答案】 B;

【解析】 由题意有 $z=\frac{3-4\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\frac{(3-4\mathrm{i})(-\mathrm{i})}{\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i})}=-4-3\mathrm{i}$，故 $|z|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5$.

故选：B.

3 、【答案】 A;

【解析】 由题可知圆心为$(a,0)$，

因为直线 $2x+y-1=0$ 是圆$(x-a)^2+y^2=1$ 的一条对称轴，

所以圆心在直线上，即 $2a+0-1=0$，解得 $a=\frac{1}{2}$.

故选：A.

4 、【答案】 C;

【解析】 $f(-x)+f(x)=\frac{1}{1+2^{-x}}+\frac{1}{1+2^{x}}=\frac{2^{x}}{1+2^{x}}+\frac{1}{1+2^{x}}=1$，故 A 错误，C 正确；

$f(-x)-f(x)=\frac{1}{1+2^{-x}}-\frac{1}{1+2^{x}}=\frac{2^{x}}{1+2^{x}}-\frac{1}{1+2^{x}}=\frac{2^{x}-1}{2^{x}+1}=1-\frac{2}{2^{x}+1}$，不是常数，故 BD 错误；

故选：C.

5 、【答案】 C;

【解析】 因为 $f(x)=\cos^2x-\sin^2x=\cos 2x$.

对于 A 选项，当 $-\frac{\pi}{2}<x<-\frac{\pi}{6}$ 时，$-\pi<2x<-\frac{\pi}{3}$，则 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增，A 错；

对于 B 选项，当 $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{12}$ 时，$-\frac{\pi}{2}<2x<\frac{\pi}{6}$，则 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{12}\right)$ 上不单调，B 错；

对于 C 选项，当 $0<x<\frac{\pi}{3}$ 时，$0<2x<\frac{2\pi}{3}$，则 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递减，C 对；

对于 D 选项，当 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{7\pi}{12}$ 时，$\frac{\pi}{2}<2x<\frac{7\pi}{6}$，则 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{12}\right)$ 上不单调，D 错.

故选：C.

6 、【答案】 C;

【解析】 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $d\neq 0$，记 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数.

若 $\{a_n\}$ 为递增数列，则 $d>0$，

若 $a_1\geqslant 0$，则当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n>a_1\geqslant 0$；若 $a_1<0$，则 $a_n=a_1+(n-1)d$，

由 $a_n=a_1+(n-1)d>0$ 可得 $n>1-\frac{a_1}{d}$，取 $N_0=\left[1-\frac{a_1}{d}\right]+1$，则当 $n>N_0$ 时，$a_n>0$，

所以，“$\{a_n\}$ 是递增数列” $\Rightarrow$ “ 存在正整数 N_0，当 $n>N_0$ 时，$a_n>0$”；

若存在正整数 N_0，当 $n>N_0$ 时，$a_n>0$，取 $k\in\mathrm{N}^*$ 且 $k>N_0$，$a_k>0$，

假设 $d<0$，令 $a_n=a_k+(n-k)d<0$ 可得 $n>k-\frac{a_k}{d}$，且 $k-\frac{a_k}{d}>k$，

当 $n>\left[k-\frac{a_k}{d}\right]+1$ 时，$a_n<0$，与题设矛盾，假设不成立，则 $d>0$，即数列 $\{a_n\}$ 是递增数列.

所以，“$\{a_n\}$ 是递增数列” $\Leftarrow$ “存在正整数 N_0，当 $n>N_0$时，$a_n>0$”.

所以，“$\{a_n\}$ 是递增数列” 是 “存在正整数 N_0，当 $n>N_0$ 时，$a_n>0$” 的充分必要条件.

故选：C.

7 、【答案】 D;

【解析】 当 $T=220$，$P=1026$ 时，$\lg P>3$，此时二氧化碳处于固态，故 A 错误.

当 $T=270$，$P=128$ 时，$2<\lg P<3$，此时二氧化碳处于液态，故 B 错误.

当 $T=300$，$P=9987$ 时，$\lg P$ 与 4 非常接近，故此时二氧化碳处于固态，

另一方面，$T=300$ 时对应的是非超临界状态，故 C 错误.

当 $T=360$，$P=729$ 时，因为 $2<\lg P<3$，故此时二氧化碳处于超临界状态，故 D 正确.

故选：D.

8 、【答案】 B;

【解析】 令 $x=1$，则 $a_4+a_3+a_2+a_1+a_0=1$，

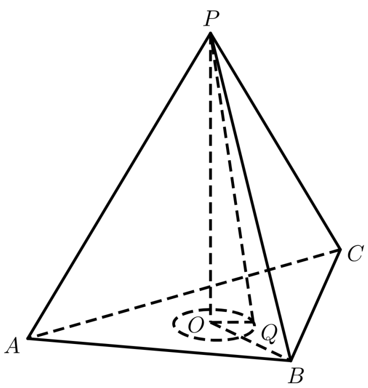
令 $x=-1$，则 $a_4-a_3+a_2-a_1+a_0=(-3)^4=81$，

故 $a_4+a_2+a_0=\frac{1+81}{2}=41$，

故选：B.

9 、【答案】 B;

【解析】



设顶点 P 在底面上的投影为 O，连接 BO，则 O 为三角形 ABC 的中心，

且 $BO=\frac{2}{3}\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，故 $PO=\sqrt{36-12}=2\sqrt{6}$.

因为 $PQ=5$，故 $OQ=1$，

故 S 的轨迹为以 O 为圆心，1 为半径的圆，

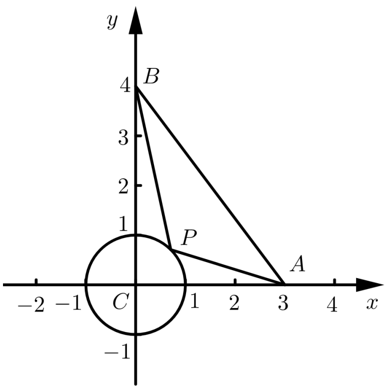
而三角形 ABC 内切圆的圆心为 O，半径为 $\frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 36}{3\times 6}=\sqrt{3}>1$，

故 S 的轨迹在三角形 ABC 内部，故其面积为 π，

故选：B.

10 、【答案】 D;

【解析】 解：依题意建立平面直角坐标系，如图，则 $C(0,0)$，$A(3,0)$，$B(0,4)$，



因为 $PC=1$，所以 P 在以 C 为圆心，1 为半径的圆上运动，

设 $P(\cos\theta,\sin\theta)$，$\theta\in[0,2\pi]$，

所以 $\overrightarrow{PA}=(3-\cos\theta,-\sin\theta)$，$\overrightarrow{PB}=(-\cos\theta,4-\sin\theta)$，

所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(-\cos\theta)\times(3-\cos\theta)+(4-\sin\theta)\times(-\sin\theta)$

$=\cos^2\theta-3\cos\theta-4\sin\theta+\sin^2\theta$

$=1-3\cos\theta-4\sin\theta$

$=1-5\sin(\theta+\varphi)$，其中 $\sin\varphi=\frac{3}{5}$，$\cos\varphi=\frac{4}{5}$，

因为 $-1\leqslant\sin(\theta+\varphi)\leqslant1$，所以 $-4\leqslant1-5\sin(\theta+\varphi)\leqslant6$，

即 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\in[-4,6]$；

故选：D.

11 、【答案】 $(-\infty,0)\cup(0,1]$

;

【解析】 解：因为 $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{1-x}$，所以 $\begin{cases}1-x\geqslant0\\x\neq0\end{cases}$，解得 $x\leqslant1$ 且 $x\neq0$，

故函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,1]$；

故答案为：$(-\infty,0)\cup(0,1]$.

12 、【答案】 -3;

【解析】 解：由双曲线 $y^2+\frac{x^2}{m}=1$，得 $m<0$，

即双曲线的标准方程为 $y^2-\frac{x^2}{-m}=1$，

则 $a=1$，$b=\sqrt{-m}$，

又双曲线 $y^2+\frac{x^2}{m}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，

所以 $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，即 $\frac{1}{\sqrt{-m}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，解得 $m=-3$.

故答案为：-3.

13 、【答案】 1

;$-\sqrt{2}$;

【解析】 $\because f(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}A-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$，

$\therefore A=1$，

$\therefore f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，

$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=2\sin(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{3})=-2\sin\frac{\pi}{4}=-\sqrt{2}$，

故答案为：1，$-\sqrt{2}$.

14 、【答案】 0（答案不唯一）;1;

【解析】 若 $a=0$，则 $f(x)=\begin{cases}1,x<0\\(x-2)^2,x\geqslant 0\end{cases}$，

$\therefore f(x)_{min}=0$；

若 $a<0$，当 $x<a$ 时，$f(x)=-ax+1$ 单调递增，当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，故 $f(x)$ 没有最小值，不符合题目要求；

若 $a>0$，当 $x<a$ 时，$f(x)=-ax+1$ 单调递减，$f(x)>f(a)=-a^2+1$，

当 $x\geqslant a$ 时，$f(x)_{min}=\begin{cases}0,0<a<2\\(a-2)^2，a\geqslant 2\end{cases}$，

$\therefore -a^2+1\geqslant 0$ 或 $-a^2+1\geqslant(a-2)^2$，

解得 $0<a\leqslant 1$，

综上可得， $0\leqslant a\leqslant 1$，a 的最大值为 1.

故答案为：0（答案不唯一），1.

15 、【答案】 ①③④;

【解析】 由题意可知，$\forall n \in \mathrm{N}^*$，$a_n > 0$，

当 $n = 1$ 时，$a_1^2 = 9$，可得 $a_1 = 3$；

当 $n \geqslant 2$ 时，由 $S_n = \frac{9}{a_n}$ 可得 $S_{n-1} = \frac{9}{a_{n-1}}$,

两式作差可得 $a_n = \frac{9}{a_n} - \frac{9}{a_{n-1}}$,

所以$\frac{9}{a_{n-1}} = \frac{9}{a_n} - a_n$，则 $\frac{9}{a_2} - a_2 = 3$，整理可得 $a_2^2 + 3a_2 - 9 = 0$，

因为 $a_2 > 0$，解得 $a_2 = \frac{3\sqrt{5}-3}{2} < 3$，① 对；

假设数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，设其公比为 q，

则 $a_2^2 = a_1 a_3$，即 $\left(\frac{9}{S_2}\right)^2 = \frac{81}{S_1 S_3}$,

所以$S_2^2 = S_1 S_3$，可得 $a_1^2(1+q)^2 = a_1^2\left(1+q+q^2\right)$，解得 $q = 0$，不符合题意，

故数列 $\{a_n\}$ 不是等比数列，② 错；

当 $n \geqslant 2$ 时，$a_n = \frac{9}{a_n} - \frac{9}{a_{n-1}} = \frac{9(a_{n-1}-a_n)}{a_n a_{n-1}} > 0$，可得 $a_n < a_{n-1}$，

所以数列 $\{a_n\}$ 为递减数列，③ 对；

假设对任意的 $n \in \mathrm{N}^*$，$a_n \geqslant \frac{1}{100}$，则 $S_{100000} \geqslant 100000 \times \frac{1}{100} = 1000$，

所以$a_{100000} = \frac{9}{S_{100000}} \leqslant \frac{9}{1000} < \frac{1}{100}$，与假设矛盾，所以假设不成立，④ 对.

故答案为：①③④.

16 、【答案】 (1) $\frac{\pi}{6}$

;

(2) $6 + 6\sqrt{3}$

;

【解析】 (1) 解：因为 $C \in (0,\pi)$，则 $\sin C > 0$，由已知可得 $\sqrt{3}\sin C = 2\sin C\cos C$，

可得 $\cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}$， 因此 $C = \frac{\pi}{6}$.

(2) 解：由三角形的面积公式可得 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{3}{2}a = 6\sqrt{3}$，

解得 $a = 4\sqrt{3}$.

由余弦定理可得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 48 + 36 - 2 \times 4\sqrt{3} \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12$，

$\therefore c = 2\sqrt{3}$，

所以$\triangle ABC$ 的周长为 $a + b + c = 6\sqrt{3} + 6$.

17 、【答案】 (1) 见解析

;

(2) 见解析

;

【解析】 (1) 取 AB 的中点 K，连接 MK，NK，

由三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 可得四边形 ABB_1A_1 为平行四边形，

而 $B_1M = MA_1$，$BK = KA$，则 $MK//BB_1$，

而 $MK \not\subset$ 平面 BCC_1B_1，$BB_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1，故 $MK//$ 平面 BCC_1B_1，

而 $CN = NA$，$BK = KA$，则 $NK//BC$，

同理可得 $NK//$ 平面 BCC_1B_1，

而 $NK \cap MK = K$，NK，$MK \subset$ 平面 MKN，

故平面 $MKN//$ 平面 BCC_1B_1，而 $MN \subset$ 平面 MKN，

故 $MN//$ 平面 BCC_1B_1.

(2) 因为侧面 CBB_1C_1为正方形，故 $CB \perp BB_1$，

而 $CB \subset$平面 CBB_1C_1，平面 $CBB_1C_1 \perp$平面 ABB_1A_1，

平面 $CBB_1C_1 \cap$平面 $ABB_1A_1 = BB_1$，故 $CB \perp$平面 ABB_1A_1.

因为 $NK//BC$，故 $NK \perp$平面 ABB_1A_1.

因为 $AB \subset$平面 ABB_1A_1，故 $NK \perp AB$，

若选①，则 $AB \perp MN$，而 $NK \perp AB$，$NK \cap MN = N$，

故 $AB \perp$平面 MNK，而 $MK \subset$平面 MNK，故 $AB \perp MK$，

所以 $AB \perp BB_1$，而 $CB \perp BB_1$，$CB \cap AB = B$，故 $BB_1 \perp$平面 ABC，

故可建立如图所示的空间直角坐标系，则 $B(0,0,0)$,$A(0,2,0)$，$N(1,1,0)$,$M(0,1,2)$，

故$\overrightarrow{BA} = (0,2,0)$，$\overrightarrow{BN} = (1,1,0)$，$\overrightarrow{BM} = (0,1,2)$，

设平面 BNM 的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BN}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BM}=0\end{cases}$,

从而$\begin{cases}x+y=0\\ y+2z=0\end{cases}$，取 $z=-1$，则$\vec{n}=(-2,2,-1)$，

设直线 AB 与平面 BNM 所成的角为θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{AB}\right\rangle\right|=\frac{4}{2\times3}=\frac{2}{3}$.

若选②，因为 $NK//BC$，故 $NK\perp$平面 ABB_1A_1，而 $KM\subset$平面 MKN，

故 $NK\perp KM$，而$B_1M=BK=1$，$NK=1$，故$B_1M=NK$，

而$B_1B=MK=2$，$MB=MN$，故$\triangle BB_1M\cong\triangle MKN$，

所以$\angle BB_1M=\angle MKN=90°$，故$A_1B_1\perp BB_1$，

而 $CB\perp BB_1$，$CB\cap AB=B$，故 $BB_1\perp$平面 ABC，

故可建立如图所示的空间直角坐标系，则 $B(0,0,0)$，$A(0,2,0)$，$N(1,1,0)$，$M(0,1,2)$，

故$\overrightarrow{BA}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{BN}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{BM}=(0,1,2)$，

设平面 BNM 的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

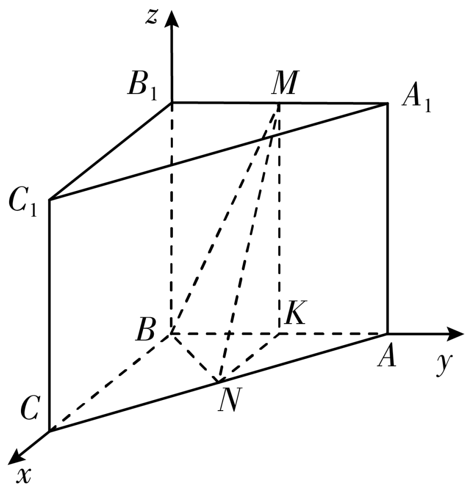
则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BN}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BM}=0\end{cases}$,

从而$\begin{cases}x+y=0\\ y+2z=0\end{cases}$，取 $z=-1$，

则$\vec{n}=(-2,2,-1)$，

设直线 AB 与平面 BNM 所成的角为θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{AB}\right\rangle\right|=\frac{4}{2\times3}=\frac{2}{3}$.



18 、【答案】 (1) 0.4

;

(2) $\frac{7}{5}$

;

(3) 丙

;

【解析】 (1) 由频率估计概率可得，

甲获得优秀的概率为 0.4，乙获得优秀的概率为 0.5，丙获得优秀的概率为 0.5，

故答案为 0.4.

(2) 设A_1，A_2，A_3分别表示甲、乙、丙在校运动会铅球比赛中获得优秀奖，

$P(X=0)=P(\overline{A_1A_2A_3})=0.6\times0.5\times0.5=\frac{3}{20}$,

$P(X=1)=P(A_1\overline{A_2A_3})+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})+P(\overline{A_1A_2}A_3)$

$=0.4\times0.5\times0.5+0.6\times0.5\times0.5+0.6\times0.5\times0.5=\frac{8}{20}$,

$P(X=2)=P(A_1A_2\overline{A_3})+P(A_1\overline{A_2}A_3)+P(\overline{A_1}A_2A_3)$

$=0.4\times0.5\times0.5+0.4\times0.5\times0.5+0.6\times0.5\times0.5=\frac{7}{20}$,

$P(X=3)=P(A_1A_2A_3)=0.4\times0.5\times0.5=\frac{2}{20}$,

∴ X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{3}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{2}{20}$

$\therefore EX=0\times\frac{3}{20}+1\times\frac{8}{20}+2\times\frac{7}{20}+3\times\frac{2}{20}=\frac{7}{5}$.

(3) 丙获得冠军的概率估计值最大.

因为铅球比赛无论比赛几次就取最高成绩．比赛一次，丙获得 9.85 的概率为 $\frac{1}{4}$，甲获得 9.80 的概率为 $\frac{1}{10}$，乙获得 9.78 的概率为 $\frac{1}{6}$．并且丙的最高成绩是所有成绩中最高的，比赛次数越多，对丙越有利.

19 、【答案】 (1) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

;

(2) $k=-4$

;

【解析】 (1) 依题意可得 $b=1$，$2c=2\sqrt{3}$，又$c^2=a^2-b^2$，

所以 $a=2$，所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2) 依题意过点 $P(-2,1)$ 的直线为 $y-1=k(x+2)$，设 $B(x_1,y_1)$、$C(x_2,y_2)$，不妨令 $-2\leqslant x_1<x_2\leqslant 2$，

由 $\begin{cases} y-1=k(x+2) \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$ ，消去 y 整理得$(1+4k^2)x^2+(16k^2+8k)x+16k^2+16k=0$，

所以 $\Delta=(16k^2+8k)^2-4(1+4k^2)(16k^2+16k)>0$ ，解得 $k<0$，

所以 $x_1+x_2=-\frac{16k^2+8k}{1+4k^2}$， $x_1\cdot x_2=\frac{16k^2+16k}{1+4k^2}$，

直线 AB 的方程为 $y-1=\frac{y_1-1}{x_1}x$，

令 $y=0$，解得 $x_M=\frac{x_1}{1-y_1}$，

直线 AC 的方程为 $y-1=\frac{y_2-1}{x_2}x$，

令 $y=0$，解得 $x_N=\frac{x_2}{1-y_2}$，

所以 $|MN|=|x_N-x_M|=\left|\frac{x_2}{1-y_2}-\frac{x_1}{1-y_1}\right|$

$=\left|\frac{x_2}{1-[k(x_2+2)+1]}-\frac{x_1}{1-[k(x_1+2)+1]}\right|$

$=\left|-\frac{x_2}{k(x_2+2)}+\frac{x_1}{k(x_1+2)}\right|$

$=\left|\frac{(x_2+2)x_1-x_2(x_1+2)}{k(x_2+2)(x_1+2)}\right|$

$=\frac{2|x_1-x_2|}{|k|(x_2+2)(x_1+2)}=2$，

所以$|x_1-x_2|=|k|(x_2+2)(x_1+2)$，

即 $\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=|k|[x_2x_1+2(x_2+x_1)+4]$，

即 $\sqrt{\left(-\frac{16k^2+8k}{1+4k^2}\right)^2-4\times\frac{16k^2+16k}{1+4k^2}}=|k|\left[\frac{16k^2+16k}{1+4k^2}+2\left(-\frac{16k^2+8k}{1+4k^2}\right)+4\right]$，

即 $\frac{8}{1+4k^2}\sqrt{(2k^2+k)^2-(1+4k^2)(k^2+k)}=\frac{|k|}{1+4k^2}\left[16k^2+16k-2(16k^2+8k)+4(1+4k^2)\right]$，

整理得 $2\sqrt{-k}=|k|$，解得 $k=-4$.

20 、【答案】 (1) $y=x$

;

(2) $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.

;

(3) 证明见解析

;

【解析】 (1) 因为 $f(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\ln(1+\mathrm{x})$，所以 $f(0)=0$，

即切点坐标为 $(0,0)$，

$f'(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}(\ln(1+\mathrm{x})+\frac{1}{1+\mathrm{x}})$，

∴ 切线斜率 $k=f'(0)=1$，

∴ 切线方程为 $y=x$.

(2) 因为 $g(x)=f'(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}(\ln(1+\mathrm{x})+\frac{1}{1+\mathrm{x}})$，

所以 $g'(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}(\ln(1+\mathrm{x})+\frac{2}{1+\mathrm{x}}-\frac{1}{(1+\mathrm{x})^2})$，

令 $h(x)=\ln(1+x)+\frac{2}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}$，

则 $h'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{2}{(1+x)^2}+\frac{2}{(1+x)^3}=\frac{x^2+1}{(1+x)^3}>0$，

∴ $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore h(x) \geqslant h(0) = 1 > 0$，

$\therefore\ g'(x) > 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立，

$\therefore g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增．

(3) 方法一：原不等式等价于 $f(s+t) - f(s) - f(t) > 0$，

令 $F(s) = f(s+t) - f(s) - f(t)$，

则$F'(s) = f'(s+t) - f'(s)$，

$\because s + t > s$，$f'(x)$单调递增，

$\therefore f'(s+t) > f'(s)$．

$\therefore F'(s) > 0$．

$\therefore F(s)$单调递增．

$\therefore F(s) > F(0) = f(t) - f(0) - f(t) = 0$．

$\therefore$不等式成立．

(3) 方法二：原不等式等价于 $f(s+t) - f(s) > f(t) - f(0)$，

令 $m(x) = f(x+t) - f(x)(x,t > 0)$，

即证 $m(s) > m(0)$，

$\because m(x) = f(x+t) - f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{x+t}}\ln(1+\mathrm{x}+\mathrm{t}) - \mathrm{e}^{\mathrm{x}}\ln(1+\mathrm{x})$，

$\therefore m'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{x+t}}\ln(1+\mathrm{x}+\mathrm{t}) + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{x+t}}}{1+\mathrm{x}+\mathrm{t}} - \mathrm{e}^{\mathrm{x}}\ln(1+\mathrm{x}) - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}{1+\mathrm{x}}$

$= g(x+t) - g(x)$，

由 (1)知 $g(x) = f'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}(\ln(1+\mathrm{x}) + \frac{1}{1+\mathrm{x}})$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增，

$\therefore g(x+t) > g(x)$，

$\therefore\ m'(x) > 0$，

$\therefore\ \ m(x)$在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

又 $s > 0$，$\therefore m(s) > m(0)$，故命题得证．

21 、【答案】 (1) 是 $5-$ 连续可表数列；不是 $6-$ 连续可表数列．

;

(2) 证明见解析．

;

(3) 证明见解析.

;

【解析】 (1) $a_2=1$，$a_1=2$，$a_1+a_2=3$，$a_3=4$，$a_2+a_3=5$，所以 Q 是 $5-$ 连续可表数列，易知，不存在 i，j 使得 $a_i+a_{i+1}+\cdots+a_{i+j}=6$，所以 Q 不是 $6-$ 连续可表数列.

(2) 若 $k\leqslant 3$，设 Q 为 a,b,c，则至多 $a+b,b+c,a+b+c,a,b,c$，6 个数字，没有 8 个，矛盾；

当 $k=4$ 时，数列 Q:1,4,1,2，满足 $a_1=1$，$a_4=2$，$a_3+a_4=3$，$a_2=4$，$a_1+a_2=5$，$a_1+a_2+a_3=6$，$a_2+a_3+a_4=7$，$a_1+a_2+a_3+a_4=8$，

$\therefore k_{min}=4$.

(3) 当 $k\leqslant 6$ 时，由（2）知 $k\leqslant 3$ 时至多可表示 6 个数，下面说明 $k\in[4,6]$:

$k=4$ 时，$a_i+a_{i+1}+\cdots+a_{i+j}$至多表示 10 个数；

$k=5$ 时，$a_i+a_{i+1}+\cdots+a_{i+j}$至多表示 15 个数；

$k=6$ 时，$a_i+a_{i+1}+\cdots+a_{i+j}$至多表示 21 个数.

发现 $k<6$ 时至多可表示的数均小于 20，与题意不符.

下面讨论 $k=6$ 的情况：

首先，数列$\{a_n\}$中不能出现相同的两项.

若$\exists\, a_m=a_k(m<k)$，则$a_m+\cdots+a_{k-1}=a_{m+1}+\cdots+a_k$，

其次，由于 Q：a_1，a_2，$\cdots$，a_k为 $20-$连续可表数列，

且$a_1+a_2+\cdots+a_k<20$，

则$\exists\, i\in\{1,2,\cdots,k\}$使$a_i<0$，且对于 $a=6$，至多有一个数小于 0，

另外 20 个数为 $1\backsim 20$，

若 $i\neq 1$ 或 6，则$a_1+a_2+\cdots+a_{i-1}$与$a_{i+1}+\cdots+a_6$中必有一个为 20，

若$a_1+a_2+\cdots+a_{i-1}=20$，

则$a_i+a_{i+1}+\cdots+a_6<0$ 为另一个小于 0 的可能取值，矛盾.

若 $i=1$ 或 6，根据对称性 $i=1$，6 效果一致，

不妨设$a_1<0$，进而讨论 Q：a_1，$\cdots$，a_6中是否有 1:

①若无 1，则$a_2\geqslant 2$，$a_1+a_2=1$，

$19-a_1-a_2 \geqslant a_3+\cdots+a_6 \geqslant 3+4+5+6=18$

$\Rightarrow a_1=-1$，$a_2=2$，

$a_1+a_2+a_3=a_3+1 \neq a_4$，$a_5$，$a_6 \Rightarrow a_3=6$.

可能成立的数列为

-1，2，6，3，5，4（$6+3=5+4$，矛盾），

-1，2，6，4，5，3（$2+6=5+3$，矛盾），

②若有 1，则$a_1+a_2 \geqslant 2$，

所以$a_2 \geqslant 3(a_1=-1)$，

则$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 \geqslant -1+3+4+5+6+7>20$，矛盾.