2022年高考真题全国甲卷理科数学试卷-学生用卷

一、单选题本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1、若$z=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，则$\frac{z}{z\bar{z}-1}=$（　　）

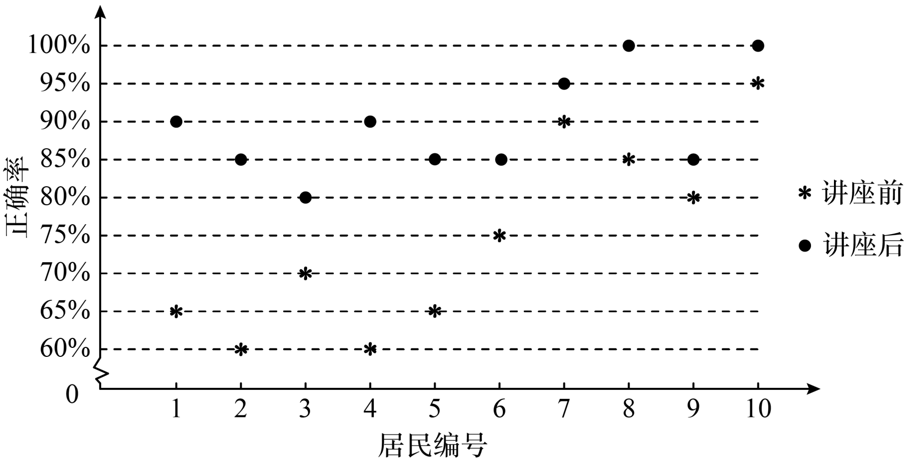
A. $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$

B. $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

C. $-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$

D. $-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$

2、某社区通过公益讲座以普及社区居民的垃圾分类知识．为了解讲座效果，随机抽取10位社区居民，让他们在讲座前和讲座后各回答一份垃圾分类知识问卷，这10位社区居民在讲座前和讲座后问卷答题的正确率如下图：



则（　　）

A. 讲座前问卷答题的正确率的中位数小于70%

B. 讲座后问卷答题的正确率的平均数大于85%

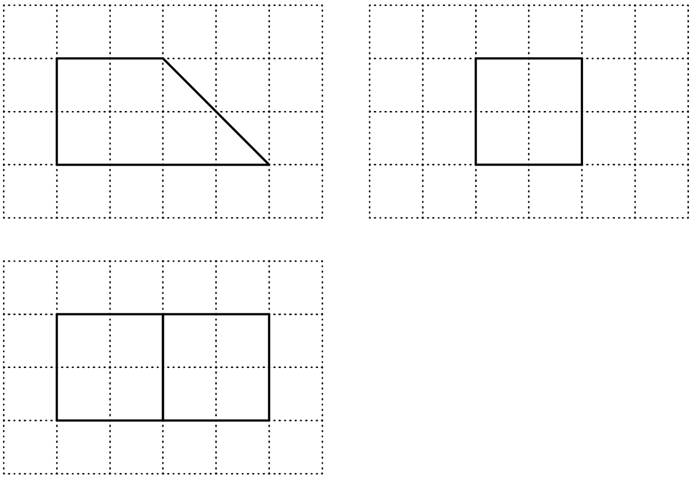
C. 讲座前问卷答题的正确率的标准差小于讲座后正确率的标准差

D. 讲座后问卷答题的正确率的极差大于讲座前正确率的极差

3、设全集$U=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，集合$A=\{-1,2\},B=\left\{x|x^2-4x+3=0\right\}$，则$\complement_U(A\cup B)=$（　　）

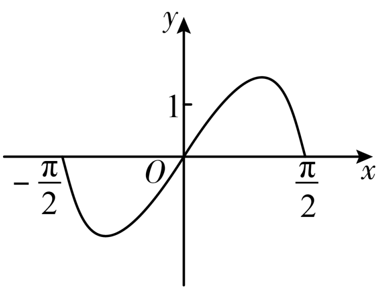
A. $\{1,3\}$　　B. $\{0,3\}$　　C. $\{-2,1\}$　　D. $\{-2,0\}$

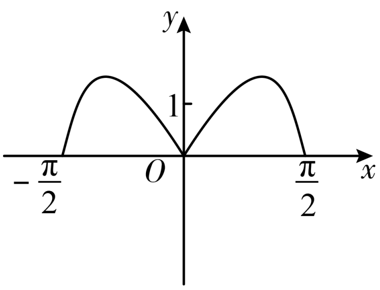
4、如图，网格纸上绘制的是一个多面体的三视图，网格小正方形的边长为 1，则该多面体的体积为（　　　　　　）

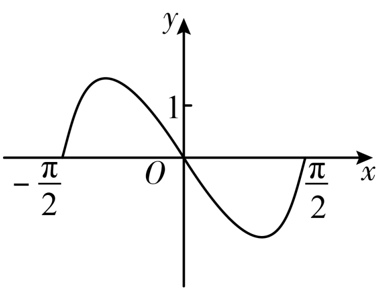


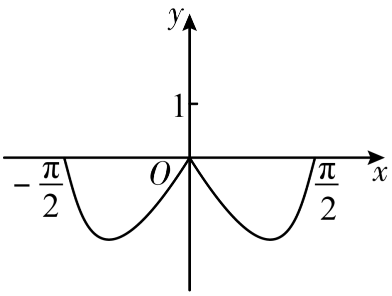
A. 8　　　　　B. 12　　　　　C. 16　　　　　D. 20

5、函数 $y=(3^x-3^{-x})\cos x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的图像大致为（　　　　　　）

A.


B.


C.


D. 

6、当 $x=1$ 时，函数 $f(x)=a\ln x+\frac{b}{x}$取得最大值-2，则$f'(2)=$（　　）

A. -1　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

7、在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，已知B_1D 与平面 $ABCD$ 和平面 AA_1B_1B 所成的角均为 $30°$，则（　　）

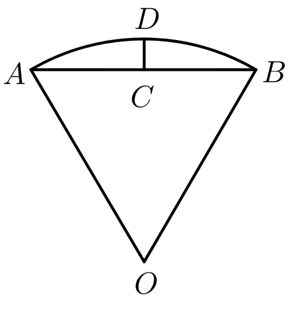
A. $AB=2AD$

B. AB 与平面 AB_1C_1D 所成的角为 $30°$

C. $AC=CB_1$

D. B_1D 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 $45°$

8、沈括的《梦溪笔谈》是中国古代科技史上的杰作，其中收录了计算圆弧长度的“会圆术”，如图，$\overset{\frown}{AB}$是以 O 为圆心，OA 为半径的圆弧，C 是 AB 的中点，D 在$\overset{\frown}{AB}$上，$CD\perp AB$. “会圆术”给出$\overset{\frown}{AB}$的弧长的近似值 s 的计算公式：$s=AB+\frac{CD^2}{OA}$. 当 $OA=2,\angle AOB=60°$时，$s=$（　　）



A. $\frac{11-3\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{11-4\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{9-3\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{9-4\sqrt{3}}{2}$

9、甲、乙两个圆锥的母线长相等，侧面展开图的圆心角之和为 2π，侧面积分别为$S_{甲}$和$S_{乙}$，体积分别为$V_{甲}$和$V_{乙}$．若$\frac{S_{甲}}{S_{乙}}=2$，则$\frac{V_{甲}}{V_{乙}}=$（　　　　　　）

A. $\sqrt{5}$

B. $2\sqrt{2}$

C. $\sqrt{10}$

D. $\frac{5\sqrt{10}}{4}$

10、椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左顶点为 A，点 P，Q 均在 C 上，且关于 y 轴对称．若直线 AP,AQ 的斜率之积为$\frac{1}{4}$，则 C 的离心率为（　　　　　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{3}$

11、设函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$在区间$(0,\pi)$上恰有三个极值点、两个零点，则$\omega$的取值范围是（　　　　　　）

A. $\left[\frac{5}{3},\frac{13}{6}\right)$

B. $\left[\frac{5}{3},\frac{19}{6}\right)$

C. $\left(\frac{13}{6},\frac{8}{3}\right]$

D. $\left(\frac{13}{6},\frac{19}{6}\right]$

12、已知 $a=\frac{31}{32}$，$b=\cos\frac{1}{4}$，$c=4\sin\frac{1}{4}$，则（　　）

A. $c>b>a$　　B. $b>a>c$　　C. $a>b>c$　　D. $a>c>b$

二、填空题本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13、设向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角的余弦值为$\frac{1}{3}$，且$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=3$，则

$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=$ ______ .

14、若双曲线$y^2-\frac{x^2}{m^2}=1(m>0)$的渐近线与圆$x^2+y^2-4y+3=0$ 相切，则

$m=$ ______ .

15、从正方体的 8 个顶点中任选 4 个，则这 4 个点在同一个平面的概率

为 ______ .

16、已知△ ABC 中，点 D 在边 BC 上，$\angle ADB=120°$，$AD=2$，$CD=2BD$．当$\frac{AC}{AB}$取得最小值时，$BD=$ ______ .

三、解答题共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题．考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

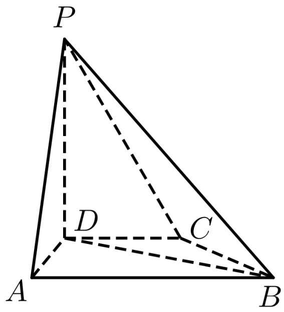
17、记S_n为数列$\{a_n\}$的前 n 项和．已知 $\frac{2S_n}{n}+n=2a_n+1$.

(1) 证明：$\{a_n\}$是等差数列；

(2) 若a_4，a_7，a_9成等比数列，求S_n的最小值．

18、在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$底面 $ABCD$，$CD//AB$，$AD=DC=CB=1$，$AB=2$，

$DP=\sqrt{3}$.



(1) 证明：$BD \perp PA$；

(2) 求 PD 与平面 PAB 所成的角的正弦值．

19、甲、乙两个学校进行体育比赛，比赛共设三个项目，每个项目胜方得 10 分，负方得 0 分，没有平局．三个项目比赛结束后，总得分高的学校获得冠军．已知甲学校在三个项目中获胜的概率分别为 0.5，0.4，0.8，各项目的比赛结果相互独立．

(1) 求甲学校获得冠军的概率；

(2) 用 X 表示乙学校的总得分，求 X 的分布列与期望．

20、设抛物线 $C{:}y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，点 $D(p,0)$，过 F 的直线交 C 于 M，N 两点．当直线 MD 垂直于 x 轴时，$|MF|=3$．

(1) 求 C 的方程；

(2) 设直线 MD,ND 与 C 的另一个交点分别为 A，B，记直线 MN,AB 的倾斜角分别为α,β．当$\alpha-\beta$取得最大值时，求直线 AB 的方程．

21、已知函数 $f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}-\ln x+x-a$．

(1) 若 $f(x)\geqslant 0$，求 a 的取值范围；

(2) 证明：若 $f(x)$有两个零点x_1,x_2，求证：$x_1x_2<1$．

【选修 4-4：坐标系与参数方程】

22、在直角坐标系 xOy 中，曲线C_1的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{2+t}{6}\\ y=\sqrt{t}\end{cases}$ (t 为参数)，曲线C_2的参数方程为 $\begin{cases}x=-\frac{2+s}{6}\\ y=-\sqrt{s}\end{cases}$($s$ 为参数)．

(1) 写出C_1的普通方程；

(2) 以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线C_3的极坐标方程为 $2\cos\theta-\sin\theta=0$，求C_3与C_1交点的直角坐标，及C_3与C_2交点的直角坐标.

[选修 4-5：不等式选讲]

23、已知 a，b，c 均为正数，且$a^2+b^2+4c^2=3$，证明：

(1) $a+b+2c\leqslant 3$；

(2) 若 $b=2c$，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\geqslant 3$.

1 、【答案】 C;

【解析】 $\overline{z}=-1-\sqrt{3}\mathrm{i}, z\overline{z}=(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})(-1-\sqrt{3}\mathrm{i})=1+3=4$，

$\frac{z}{z\overline{z}-1}=\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{3}=-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$，

故选 ：C.

2 、【答案】 B;

【解析】 A 选项 ：讲座前问卷答题的正确率的中位数为$\frac{70\%+75\%}{2}>70\%$，所以 A 错；

B 选项 ：讲座后问卷答题的正确率只有一个是 80%，4 个 85%，剩下全部大于等于 90%，所以讲座后问卷答题的正确率的平均数大于 85%，所以 B 对；

C 选项 ：讲座前问卷答题的正确率更加分散，所以讲座前问卷答题的正确率的标准差大于讲座后正确率的标准差，所以 C 错；

D 选项 ：讲座后问卷答题的正确率的极差为 $100\%-80\%=20\%$，讲座前问卷答题的正确率的极差为 $95\%-60\%=35\%>20\%$，所以 D 错.

3 、【答案】 D;

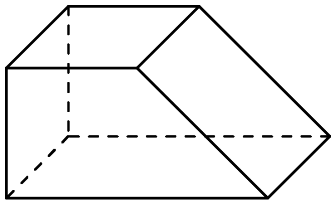
【解析】 由题意，$B=\left\{x\middle|x^2-4x+3=0\right\}=\{1,3\}$，所以 $A\cup B=\{-1,1,2,3\}$，

所以$\complement_U(A\cup B)=\{-2,0\}$.

故选：D.

4 、【答案】 B;

【解析】 由三视图还原几何体，如图，



则该几何体的体积 $V=\frac{2+4}{2}\times 2\times 2=12$.

故选：B.

5 、【答案】 A;

【解析】 令 $f(x)=(3^x-3^{-x})\cos x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,

则 $f(-x)=(3^{-x}-3^x)\cos(-x)=-(3^x-3^{-x})\cos x=-f(x)$，

所以 $f(x)$为奇函数，排除 BD;

又当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$3^x-3^{-x}>0$，$\cos x>0$，

所以 $f(x)>0$，排除 C.

故选：A.

6 、【答案】 B;

【解析】 因为函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

所以依题可知，$f(1)=-2$，$f'(1)=0$，

而$f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}$,

所以 $b=-2$，$a-b=0$，即 $a=-2,b=-2$，

所以$f'(x)=-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}$,

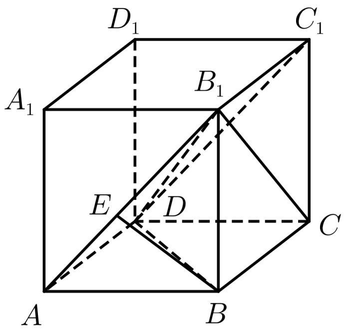
因此函数 $f(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，

当 $x=1$ 时取最大值，满足题意，即有$f'(2)=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$.

故选：B.

7 、【答案】 D;

【解析】 如图所示：



不妨设 $AB=a$，$AD=b$，$AA_1=c$，

依题意以及长方体的结构特征可知，B_1D 与平面 $ABCD$ 所成的角为$\angle B_1DB$，B_1D 与平面 AA_1B_1B 所成的角为$\angle DB_1A$，

所以 $\sin 30^\circ=\frac{c}{B_1D}=\frac{b}{B_1D}$，即 $b=c$，$B_1D=2c=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，解得 $a=\sqrt{2}c$.

对于 A，$AB=a$，$AD=b$，$AB=\sqrt{2}AD$，A 错误；

对于 B，过 B 作 $BE\perp AB_1$ 于 E，易知 $BE\perp$平面 AB_1C_1D，

所以 AB 与平面 AB_1C_1D 所成的角为$\angle BAE$，

因为 $\tan\angle BAE=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\angle BAE\neq 30^\circ$，B 错误；

对于 C，$AC=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3}c$，$CB_1=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{2}c$，$AC\neq CB_1$，C 错误；

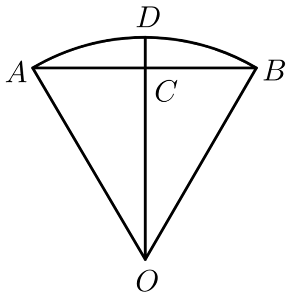
对于 D，B_1D 与平面 BB_1C_1C 所成的角为$\angle DB_1C$，$\sin\angle DB_1C=\frac{CD}{B_1D}=\frac{a}{2c}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

而$0^\circ<\angle DB_1C<90^\circ$，所以$\angle DB_1C=45^\circ$．D 正确.

故选：D.

8 、【答案】 B;

【解析】 解：如图，连接 OC，因为 C 是 AB 的中点，所以 $OC\perp AB$，又 $CD\perp AB$，所以 O,C,D 三点共线，即 $OD=OA=OB=2$，又$\angle AOB=60^\circ$，所以 $AB=OA=OB=2$，则 $OC=\sqrt{3}$，故 $CD=2-\sqrt{3}$，所以 $s=AB+\frac{CD^2}{OA}=2+\frac{(2-\sqrt{3})^2}{2}=\frac{11-4\sqrt{3}}{2}$.故选：B.



9 、【答案】 C;

【解析】 设甲、乙两个圆锥的母线长为 l，甲圆锥底面半径为r_1，乙圆锥底面半径为r_2，

则$\frac{S_{甲}}{S_{乙}}=\frac{\pi r_1 l}{\pi r_2 l}=\frac{r_1}{r_2}=2$，

所以$r_1=2r_2$.

又$\frac{2\pi r_1}{l}+\frac{2\pi r_2}{l}=2\pi$，整理得$\frac{r_1+r_2}{l}=1$，

所以$r_1=\frac{2}{3}l$，$r_2=\frac{1}{3}l$，

所以甲圆锥的高$h_1=\sqrt{l^2-\frac{4}{9}l^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}l$，

乙圆锥的高$h_2=\sqrt{l^2-\frac{1}{9}l^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}l$，

所以$\frac{V_{甲}}{V_{乙}}=\frac{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1}{\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2}=\frac{\frac{4}{9}l^2\times\frac{\sqrt{5}}{3}l}{\frac{1}{9}l^2\times\frac{2\sqrt{2}}{3}l}=\sqrt{10}$.

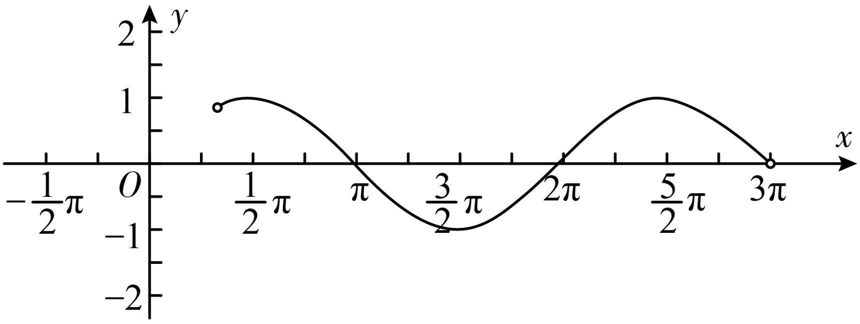
故选：C.

10 、【答案】 A;

【解析】 $A(-a,0)$，设 $P(x_1,y_1)$，则 $Q(-x_1,y_1)$，则$k_{AP}=\frac{y_1}{x_1+a}$,$k_{AQ}=\frac{y_1}{-x_1+a}$，故$k_{AP}\cdot k_{AQ}=\frac{y_1}{x_1+a}\cdot\frac{y_1}{-x_1+a}=\frac{y_1^2}{-x_1^2+a^2}=\frac{1}{4}$，又$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$，则$y_1^2=\frac{b^2\left(a^2-x_1^2\right)}{a^2}$，所以$\frac{\frac{b^2\left(a^2-x_1^2\right)}{a^2}}{-x_1^2+a^2}=\frac{1}{4}$，即$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，所以椭圆 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.故选：A.

11 、【答案】 C;

【解析】 解：依题意可得$\omega>0$，因为 $x\in(0,\pi)$，所以$\omega x+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\omega\pi+\frac{\pi}{3}\right)$，要使函数在区间$(0,\pi)$上恰有三个极值点、两个零点，又 $y=\sin x$，$x\in\left(\frac{\pi}{3},3\pi\right)$的图象如下所示：



则$\frac{5\pi}{2}<\omega\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant 3\pi$，解得$\frac{13}{6}<\omega\leqslant\frac{8}{3}$，即$\omega\in\left(\frac{13}{6},\frac{8}{3}\right]$．故选：C．

12 、【答案】 A;

【解析】 由题意得$\frac{c}{b}=4\tan\frac{1}{4}$,

因为当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$\sin x<x<\tan x$，

所以 $\tan\frac{1}{4}>\frac{1}{4}$，即$\frac{c}{b}>1$，所以 $c>b$．

设 $f(x)=\cos x+\frac{1}{2}x^2-1$，$x\in(0,+\infty)$，则$f'(x)=-\sin x+x>0$，

所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，则 $f\left(\frac{1}{4}\right)>f(0)=0$，

所以 $\cos\frac{1}{4}-\frac{31}{32}>0$，所以 $b>a$，所以 $c>b>a$．

故选：A．

13 、【答案】 11;

【解析】 设$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为θ，因为$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角的余弦值为$\frac{1}{3}$，所以 $\cos\theta=\frac{1}{3}$，又$|\vec{a}|=1$，$\left|\vec{b}\right|=3$，所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\theta=1\times 3\times\frac{1}{3}=1$，所以$\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=2\times 1+3^2=11$．故答案为：11．

14 、【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

;

【解析】 解：双曲线$y^2-\frac{x^2}{m^2}=1(m>0)$的渐近线为 $y=\pm\frac{x}{m}$，即 $x\pm my=0$，

不妨取 $x+my=0$，圆$x^2+y^2-4y+3=0$，即$x^2+(y-2)^2=1$，

所以圆心为$(0,2)$，半径 $r=1$，

依题意，圆心$(0,2)$到渐近线 $x+my=0$ 的距离 $d=\frac{|2m|}{\sqrt{1+m^2}}=1$，

解得 $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$或 $m=-\frac{\sqrt{3}}{3}$（舍去）.

故答案为：$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

15 、【答案】 $\frac{6}{35}$.

;

【解析】 从正方体的 8 个顶点中任取 4 个，有 $n=\mathrm{C}_8^4=70$ 个结果，这 4 个点在同一个平面的有 $m=6+6=12$ 个，故所求概率 $P=\frac{m}{n}=\frac{12}{70}=\frac{6}{35}$. 故答案为：$\frac{6}{35}$.

16 、【答案】 $\sqrt{3}-1$

;

【解析】 设 $CD=2BD=2m>0$，则在$\triangle ABD$ 中，$AB^2=BD^2+AD^2-2BD\cdot AD\cos\angle ADB=m^2+4+2m$，

在$\triangle ACD$ 中，$AC^2=CD^2+AD^2-2CD\cdot AD\cos\angle ADC$

$=4m^2+4-4m$，

所以$\frac{AC^2}{AB^2}=\frac{4m^2+4-4m}{m^2+4+2m}=\frac{4(m^2+4+2m)-12(1+m)}{m^2+4+2m}$

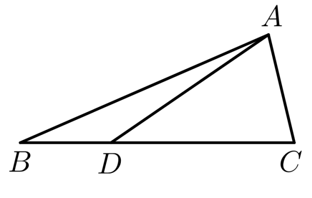
$=4-\frac{12}{(m+1)+\frac{3}{m+1}}$

$\geqslant 4-\frac{12}{2\sqrt{(m+1)\cdot\frac{3}{m+1}}}=4-2\sqrt{3}$,

当且仅当 $m+1=\frac{3}{m+1}$，即 $m=\sqrt{3}-1$ 时，等号成立，

所以当$\frac{AC}{AB}$取最小值时，$m=\sqrt{3}-1$.

故答案为：$\sqrt{3}-1$.



17 、【答案】 (1) 证明见解析

;

(2) -78

;

【解析】 (1) 因为 $\frac{2S_n}{n}+n=2a_n+1$ ，即 $2S_n+n^2=2na_n+n$①.

当 $n\geqslant 2$ 时，$2S_{n-1}+(n-1)^2=2(n-1)a_{n-1}+(n-1)$②，

①−②得，$2S_n+n^2-2S_{n-1}-(n-1)^2=2na_n+n-2(n-1)a_{n-1}-(n-1)$，

即 $2a_n+2n-1=2na_n-2(n-1)a_{n-1}+1$，

即 $2(n-1)a_n-2(n-1)a_{n-1}=2(n-1)$，

所以$a_n-a_{n-1}=1$，$n\geqslant 2$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$，

所以$\{a_n\}$是以 1 为公差的等差数列.

(2) 由(1)可得$a_4=a_1+3$，$a_7=a_1+6$，$a_9=a_1+8$，

又a_4，a_7，a_9成等比数列，所以$a_7^2=a_4\cdot a_9$，

即$(a_1+6)^2=(a_1+3)\cdot(a_1+8)$，解得$a_1=-12$，

所以$a_n=n-13$，所以 $S_n=-12n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{1}{2}n^2-\frac{25}{2}n=\frac{1}{2}\left(n-\frac{25}{2}\right)^2-\frac{625}{8}$,

所以当 $n=12$ 或 $n=13$ 时，$(S_n)_{min}=-78$.

18 、【答案】 (1) 证明见解析

;

(2) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

;

【解析】 (1) 在四边形 $ABCD$ 中，作 $DE\perp AB$ 于 E，$CF\perp AB$ 于 F，

因为 $CD//AB$，$AD=CD=CB=1$，$AB=2$，

所以四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，

所以 $AE=BF=\frac{1}{2}$,

故 $DE=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$BD=\sqrt{DE^2+BE^2}=\sqrt{3}$，

所以 $AD^2+BD^2=AB^2$，

所以 $AD\perp BD$.

因为 $PD\perp$平面 $ABCD$，$BD\subset$平面 $ABCD$，

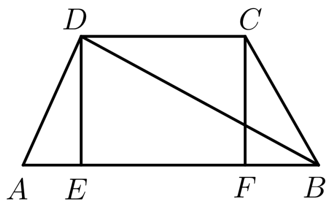
所以 $PD\perp BD$，

又 $PD\cap AD=D$，

所以 $BD\perp$平面 PAD，

又因为 $PA\subset$平面 PAD，

所以 $BD\perp PA$.



(2) 如图，以点 D 为原点建立空间直角坐标系，

$BD=\sqrt{3}$ ，

则 $A(1,0,0)$，$B\ (0,\sqrt{3},0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$.

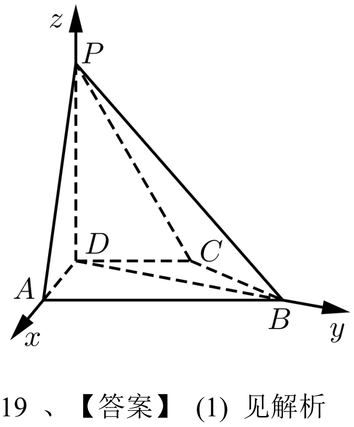
则 $\overrightarrow{AP}=(-1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BP}=(0,-\sqrt{3},\sqrt{3})$，$\overrightarrow{DP}=(0,0,\sqrt{3})$

设平面 PAB 的法向量$\vec{n}=(x,y,z)$ ，

则有$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=-x+\sqrt{3}z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BP}=-\sqrt{3}y+\sqrt{3}z=0\end{cases}$，可取 $\vec{n}=(\sqrt{3},1,1)$,

则 $\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{DP}\rangle=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{DP}}{|\vec{n}||\overrightarrow{DP}|}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

所以 PD 与平面 PAB 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.



19 、【答案】 (1) 见解析

;

(2) 见解析

;

【解析】(1) 设甲在三个项目中获胜的事件依次记为 A,B,C，所以甲学校获得冠军的概率为 $P = P(ABC)+P(\overline{A}BC)+P(A\overline{B}C)+P(AB\overline{C}) = 0.5\times0.4\times0.8+0.5\times0.4\times0.8+0.5\times0.6\times0.8+0.5\times0.4\times0.2=0.16+0.16+0.24+0.04=0.6$.

(2) 依题可知，X 的可能取值为 0,10,20,30，所以，$P(X=0)=0.5\times0.4\times0.8=0.16$,$P(X=10)=0.5\times0.4\times0.8+0.5\times0.6\times0.8+0.5\times0.4\times0.2=0.44$，$P(X=20)=0.5\times0.6\times0.8+0.5\times0.4\times0.2+0.5\times0.6\times0.2=0.34$，$P(X=30)=0.5\times0.6\times0.2=0.06$.

即 X 的分布列为

X	0	10	20	30
P	0.16	0.44	0.34	0.06

期望 $E(X)=0\times0.16+10\times0.44+20\times0.34+30\times0.06=13$.

20 、【答案】(1) $y^2=4x$

;

(2) $x-\sqrt{2}y-4=0$

;

【解析】(1) 抛物线的准线为 $x=-\frac{p}{2}$，当 MD 与 x 轴垂直时，点 M 的横坐标为 p，此时$|MF|=p+\frac{p}{2}=3$，所以 $p=2$，所以抛物线 C 的方程为$y^2=4x$；

(2) 设 $M\left(\frac{y_1^2}{4},y_1\right)$，$N\left(\frac{y_2^2}{4},y_2\right)$，$A\left(\frac{y_3^2}{4},y_3\right)$，$B\left(\frac{y_4^2}{4},y_4\right)$，直线 $MN:x=my+1$，

由$\begin{cases}x=my+1\\ y^2=4x\end{cases}$可得$y^2-4my-4=0$，$\Delta>0,y_1y_2=-4$，

由斜率公式可得$k_{MN}=\frac{y_1-y_2}{\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_2^2}{4}}=\frac{4}{y_1+y_2}$，$k_{AB}=\frac{y_3-y_4}{\frac{y_3^2}{4}-\frac{y_4^2}{4}}=\frac{4}{y_3+y_4}$，

直线 $MD:x=\frac{\frac{y_1^2}{4}-2}{y_1}\cdot y+2$，代入抛物线方程可得$y^2-\frac{4\left(\frac{y_1^2}{4}-2\right)}{y_1}\cdot y-8=0$，

$\Delta>0,y_1y_3=-8$，所以$y_3=2y_2$，同理可得$y_4=2y_1$，

所以$k_{AB}=\frac{4}{y_3+y_4}=\frac{4}{2(y_1+y_2)}=\frac{k_{MN}}{2}$,

又因为直线 MN、AB 的倾斜角分别为α,β，

所以$k_{AB}=\tan\beta=\frac{k_{MN}}{2}=\frac{\tan\alpha}{2}$,

若要使$\alpha-\beta$最大，则$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

设$k_{MN}=2k_{AB}=2k>0$，则 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{k}{1+2k^2}=\frac{1}{\frac{1}{k}+2k}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{k}\cdot 2k}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$,

当且仅当$\frac{1}{k}=2k$，即 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，等号成立，

所以当$\alpha-\beta$最大时，$k_{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，设直线 $AB:x=\sqrt{2}y+n$，

代入抛物线方程可得$y^2-4\sqrt{2}y-4n=0$，

$\Delta>0$，$y_3y_4=-4n=4y_1y_2=-16$，所以 $n=4$，

所以直线 AB：$x=\sqrt{2}y+4$，即 $x-\sqrt{2}y-4=0$.

21 、【答案】 (1) $(-\infty,\mathrm{e}+1]$

;

(2) 证明见解析

;

【解析】 (1) $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

$f'(x)=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^x-\frac{1}{x}+1=\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^x+\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{x-1}{x}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}+1\right)$,

令$f'(x)=0$，得 $x=1$，

当 $x\in(0,1)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

当 $x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

所以 $f(x)\geqslant f(x)_{min}=f(1)=\mathrm{e}+1-\mathrm{a}$，

若 $f(x)\geqslant 0$，则 $\mathrm{e}+1-\mathrm{a}\geqslant 0$,即 $a\leqslant\mathrm{e}+1$，

所以 a 的取值范围为$(-\infty,\mathrm{e}+1]$.

(2) 方法一 ：$f(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{x}-\ln\mathrm{x}}+(\mathrm{x}-\ln\mathrm{x})-\mathrm{a}$，

令 $t=x-\ln x$，$g(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{t}}+\mathrm{t}-\mathrm{a}$，

$t_1=x_1-\ln x_1$，$t_2=x_2-\ln x_2$，

则 $g(t_1)=g(t_2)=0$，

又$\because g(t)$单调递增，

$\therefore t_1=t_2$.

$\therefore x_1-\ln x_1=x_2-\ln x_2$，$\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=1$.

以下证明$\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}>\sqrt{x_1x_2}$，不妨设$x_1>x_2$，

此不等式等价于$\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1x_2}}>\ln\frac{x_1}{x_2}$,

$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}-\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}-\ln\frac{x_1}{x_2}>0$，

令 $t=\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}>1$，

只需证 $t-\frac{1}{t}-\ln(t^2)>0$，

即 $t-\frac{1}{t}-2\ln t>0$.

令 $h(t)=t-\frac{1}{t}-2\ln t(t>1)$，

$\therefore h'(t)=1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}=\frac{(t-1)^2}{t^2}>0$.

$\therefore h(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增.

$\therefore h(t)>h(1)=0$.

$\therefore\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=1$.

$\therefore x_1x_2<1$.

(2) 方法二 ：由题知，$f(x)$一个零点小于 1，一个零点大于 1，

不妨设$x_1<1<x_2$，

要证$x_1x_2<1$，即证$x_1<\frac{1}{x_2}$,

因为$x_1,\frac{1}{x_2}\in(0,1)$，即证 $f(x_1)>f\left(\frac{1}{x_2}\right)$.

因为 $f(x_1)=f(x_2)$，即证 $f(x_2)>f\left(\frac{1}{x_2}\right)$,

即证$\frac{e^x}{x}-\ln x+x-xe^{\frac{1}{x}}-\ln x-\frac{1}{x}>0,x\in(1,+\infty)$，

即证$\frac{e^x}{x}-xe^{\frac{1}{x}}-2\left[\ln x-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]>0$，

下面证明当 $x>1$ 时，$\frac{e^x}{x}-xe^{\frac{1}{x}}>0,\ln x-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)<0$，

设 $g(x)=\frac{e^x}{x}-xe^{\frac{1}{x}},x>1$，

则$g'(x)=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)e^x-\left[e^{\frac{1}{x}}+xe^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]$

$=\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)e^x-e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{e^x}{x}-e^{\frac{1}{x}}\right)=\frac{x-1}{x}\left(\frac{e^x}{x}-e^{\frac{1}{x}}\right)$,

设$\varphi(x)=\frac{e^x}{x}(x>1)$，则$\varphi'(x)=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)e^x=\frac{x-1}{x^2}e^x>0$，

所以$\varphi(x)>\varphi(1)=e$，而$e^{\frac{1}{x}}<e$，

所以$\frac{e^x}{x}-e^{\frac{1}{x}}>0$，

所以$g'(x)>0$.

所以 $g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，

即 $g(x)>g(1)=0$，所以$\frac{e^x}{x}-xe^{\frac{1}{x}}>0$，

令 $h(x)=\ln x-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right),x>1$，

则$h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{2x-x^2-1}{2x^2}=\frac{-(x-1)^2}{2x^2}<0$，

所以 $h(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，即 $h(x)<h(1)=0$，

所以 $\ln x-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)<0$；

综上，$\frac{e^x}{x}-xe^{\frac{1}{x}}-2\left[\ln x-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]>0$，所以$x_1x_2<1$.

22 、【答案】 (1) $y^2=6x-2(y\geqslant0)$ ；

;

(2) C_3与C_1的交点坐标为$\left(\frac{1}{2},1\right)$ ，$(1,2)$，C_3与C_2的交点坐标为$\left(-\frac{1}{2},-1\right)$，$(-1,-2)$.

;

【解析】 (1) 因为 $x=\frac{2+t}{6}$，$y=\sqrt{t}$，所以 $x=\frac{2+y^2}{6}$,

即C_1的普通方程为$y^2=6x-2(y\geqslant 0)$.

(2) 因为 $x=-\frac{2+s}{6}$，$y=-\sqrt{s}$ ，所以 $6x=-2-y^2$，

即C_2的普通方程为$y^2=-6x-2(y\leqslant 0)$，

由 $2\cos\theta-\sin\theta=0\Rightarrow 2\rho\cos\theta-\rho\sin\theta=0$，

即C_3的普通方程为 $2x-y=0$.

联立 $\begin{cases}y^2=6x-2(y\geqslant 0)\\ 2x-y=0\end{cases}$ ，

解得 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$，即交点坐标为$\left(\frac{1}{2},1\right)$ ，$(1,2)$；

联立$\begin{cases}y^2=-6x-2(y\leqslant 0)\\ 2x-y=0\end{cases}$ ，

解得 $\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\ y=-1\end{cases}$或$\begin{cases}x=-1\\ y=-2\end{cases}$，即交点坐标为$\left(-\frac{1}{2},-1\right)$ ，$(-1,-2)$.

23 、【答案】 (1) 见解析

;

(2) 见解析

;

【解析】 (1) 由柯西不等式有 $\left[a^2+b^2+(2c)^2\right](1^2+1^2+1^2)\geqslant(a+b+2c)^2$，

所以 $a+b+2c\leqslant 3$，

当且仅当 $a=b=2c=1$ 时取等号，

所以 $a+b+2c\leqslant 3$；

(2) 因为 $b=2c$，$a>0$，$b>0$，$c>0$，

由（1）得 $a+b+2c=a+4c\leqslant 3$，

即 $0<a+4c\leqslant 3$，所以$\frac{1}{a+4c}\geqslant\frac{1}{3}$,

由权方和不等式知 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1^2}{a}+\frac{2^2}{4c}\geqslant\frac{(1+2)^2}{a+4c}=\frac{9}{a+4c}\geqslant 3$，

当且仅当 $\frac{1}{a}=\frac{2}{4c}$ ，即 $a=1$，$c=\frac{1}{2}$时取等号，

所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\geqslant 3$.