2022年高考真题全国乙卷理科数学试卷-学生用卷

一、单选题本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1、设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，集合 M 满足$\complement_U M=\{1,3\}$，则（　　　　　　）

A. $2\in M$　　　　B. $3\in M$　　　　C. $4\notin M$　　　　D. $5\notin M$

2、已知 $z=1-2\mathrm{i}$，且 $z+a\overline{z}+b=0$，其中 a，b 为实数，则（　　　　　　）

A. $a=1,b=-2$　　　　B. $a=-1,b=2$　　　　C. $a=1,b=2$　　　　D. $a=-1,b=-2$

3、已知向量$\vec{a},\vec{b}$满足$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=3$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$（　　　　　　）

A. -2　　　　B. -1　　　　C. 1　　　　D. 2

4、嫦娥二号卫星在完成探月任务后，继续进行深空探测，成为我国第一颗环绕太阳飞行的人造行星，为研究嫦娥二号绕日周期与地球绕日周期的比值，用到数列$\{b_n\}$：$b_1=1+\frac{1}{a_1}$，$b_2=1+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2}}$，$b_3=1+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3}}}$，…，依此类推，其中$a_k\in\mathbf{N}^*(k=1,2,\cdots)$，则（　　　　　　）

A. $b_1<b_5$

B. $b_3<b_8$

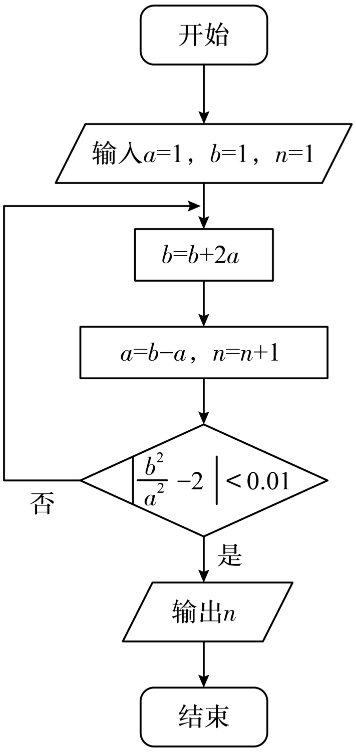
C. $b_6<b_2$

D. $b_4<b_7$

5、设 F 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，点 A 在 C 上，点 $B(3,0)$，若$|AF|=|BF|$，则$|AB|=$（　　　　　　）

A. 2　　　　B. $2\sqrt{2}$　　　　C. 3　　　　D. $3\sqrt{2}$

6、执行下边的程序框图，输出的 $n=$（　　　　　　）



A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

7、在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E，F 分别为 AB，BC 的中点，则（　　）

A. 平面$B_1EF\perp$平面 BDD_1

B. 平面$B_1EF\perp$平面A_1BD

C. 平面$B_1EF//$平面A_1AC

D. 平面$B_1EF//$平面A_1C_1D

8、已知等比数列$\{a_n\}$的前 3 项和为 168，$a_2-a_5=42$，则$a_6=$（　　）

A. 14　　B. 12　　C. 6　　D. 3

9、已知球 O 的半径为 1，四棱锥的顶点为 O，底面的四个顶点均在球 O 的球面上，则当该四棱锥的体积最大时，其高为（　　）

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

10、某棋手与甲、乙、丙三位棋手各比赛一盘，各盘比赛结果相互独立．已知该棋手与甲、乙、丙比赛获胜的概率分别为p_1,p_2,p_3，且$p_3>p_2>p_1>0$．记该棋手连胜两盘的概率为p，则（　　　　　　　）

A. p与该棋手和甲、乙、丙的比赛次序无关

B. 该棋手在第二盘与甲比赛，p最大

C. 该棋手在第二盘与乙比赛，p最大

D. 该棋手在第二盘与丙比赛，p最大

11、双曲线C的两个焦点为F_1,F_2，以C的实轴为直径的圆记为D，过F_1作D的切线与C交于M，N两点，且$\cos\angle F_1NF_2=\frac{3}{5}$，则$C$的离心率为（　　）．

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{\sqrt{13}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{17}}{2}$

12、已知函数$f(x)$，$g(x)$的定义域均为$\mathbf{R}$，且$f(x)+g(2-x)=5$，$g(x)-f(x-4)=7$．若$y=g(x)$的图像关于直线$x=2$对称，$g(2)=4$，则$\sum_{k=1}^{22}f(k)=$（　　　　　　　）

A. -21　　B. -22　　C. -23　　D. -24

二、填空题本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13、从甲、乙等 5 名同学中随机选 3 名参加社区服务工作，则甲、乙都入选的概率为____________________．

14、过四点$(0,0)$，$(4,0)$，$(-1,1)$，$(4,2)$中的三点的一个圆的方程为____________________．

15、记函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$的最小正周期为 T，若 $f(T)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x=\frac{\pi}{9}$为 $f(x)$的零点，则ω的最小值为 ____________________ .

16、已知 $x=x_1$和 $x=x_2$分别是函数 $f(x)=2a^x-\mathrm{e}x^2$（$a>0$ 且 $a\neq1$）的极小值点和极大值点．若$x_1<x_2$，则 a 的取值范围是 ____________________ .

三、解答题共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题．考生根据要求作答．

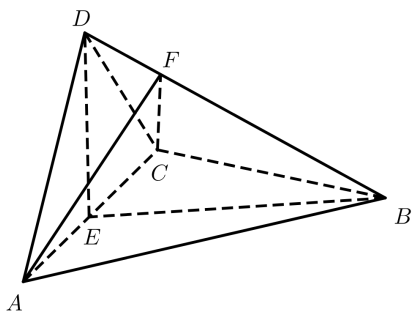
（一）必考题：共 60 分．

17、记△ ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin(C-A)$.

(1) 证明：$2a^2=b^2+c^2$；

(2) 若 $a=5$，$\cos A=\frac{25}{31}$，求△ ABC 的周长.

18、如图，四面体 $ABCD$ 中，$AD\perp CD$，$AD=CD$，$\angle ADB=\angle BDC$，E 为 AC 的中点.



(1) 证明：平面 $BED\perp$平面 ACD.

(2) 设 $AB=BD=2$，$\angle ACB=60°$，点 F 在 BD 上，当△ AFC 的面积最小时，求 CF 与平面 ABD 所成的角的正弦值.

19、某地经过多年的环境治理，已将荒山改造成了绿水青山．为估计一林区某种树木的总材积量，随机选取了 10 棵这种树木，测量每棵树的根部横截面积（单位：m^2）和材积量（单位：m^3)，得到如下数据：

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
x_i	0.04	0.06	0.04	0.08	0.08	0.05	0.05	0.07	0.07	0.06	0.6
y_i	0.25	0.40	0.22	0.54	0.51	0.34	0.36	0.46	0.42	0.40	3.9

并计算

得 $\sum_{i=1}^{10} x_i^2=0.038, \sum_{i=1}^{10} y_i^2=1.6158, \sum_{i=1}^{10} x_iy_i=0.2474$.

(1) 估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积与平均一棵的材积量；

(2) 求该林区这种树木的根部横截面积与材积量的样本相关系数（精确到 0.01）；

附：相关系数 $r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{xy}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\overline{y}^2\right)}}$,

$\sqrt{1.896}\approx 1.377$.

(3) 现测量了该林区所有这种树木的根部横截面积，并得到所有这种树木的根部横截面积总和为 $186\mathrm{m}^2$．已知树木的材积量与其根部横截面积近似成正比．利用以上数据给出该林区这种树木的总材积量的估计值.

20、已知椭圆 E 的中心为坐标原点，对称轴为 x 轴、y 轴，且过 $A(0,-2)$，$B\left(\frac{3}{2},-1\right)$两点.

(1) 求 E 的方程；

(2) 设过点 $P(1,-2)$ 的直线交 E 于 M，N 两点，过 M 且平行于 x 轴的直线与线段 AB 交于点 T，点 H 满足$\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$．证明：直线 HN 过定点.

21、已知函数 $f(x)=\ln(1+x)+ax\mathrm{e}^{-x}$.

(1) 当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程；

(2) 若 $f(x)$在区间$(-1,0),(0,+\infty)$内各恰有一个零点，求 a 的取值范围.

[选修 4-4：坐标系与参数方程]

22、在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos 2t\\ y=2\sin t\end{cases}$ (t 为参数)，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，已知直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+m=0$.

(1) 写出 l 的直角坐标方程；

(2) 若 l 与 C 有公共点，求 m 的取值范围.

[选修 4-5：不等式选讲]

23、已知 a，b，c 都是正数，且$a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}=1$，证明：

(1) $abc\leqslant\frac{1}{9}$;

(2) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{abc}}$.

1 、【答案】 A;

【解析】 由题知 $M=\{2,4,5\}$，对比选项知，A 正确，BCD 错误.

故选：A.

2 、【答案】 A;

【解析】 由题意可知$\overline{z}=1+2\mathrm{i}$，

所以 $z+a\overline{z}+b=1-2\mathrm{i}+\mathrm{a}(1+2\mathrm{i})+\mathrm{b}=(1+\mathrm{a}+\mathrm{b})+(2\mathrm{a}-2)\mathrm{i}$，

由 $z+a\overline{z}+b=0$，得$\begin{cases}1+a+b=0\\2a-2=0\end{cases}$，

即$\begin{cases}a=1\\b=-2\end{cases}$.

故选：A.

3 、【答案】 C;

【解析】 $\because|\vec{a}-2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\left|\vec{b}\right|^2$，

又$\because|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=3$，

$\therefore9=1-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\times3=13-4\vec{a}\cdot\vec{b}$，

$\therefore\vec{a}\cdot\vec{b}=1$.

故选：C.

4 、【答案】 D;

【解析】 因为$a_k\in\mathbf{N}^*(k=1,2,\cdots)$，

所以$a_1<a_1+\frac{1}{a_2}$，$\frac{1}{a_1}>\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2}}$，可得$b_1>b_2$，

同理$a_1+\frac{1}{a_2}>a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3}}$，可得$b_2<b_3$，$b_1>b_3$，

又因为$\frac{1}{a_2}>\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\frac{1}{a_4}}}$，$a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3}}<a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\frac{1}{a_4}}}$，

故$b_2<b_4$，$b_3>b_4$；

以此类推，可得$b_1>b_3>b_5>b_7>\cdots$，$b_7>b_8$，故 A 错误；

$b_3>b_7>b_8$，故 B 错误；

$\frac{1}{a_2}>\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\cdots+\frac{1}{a_6}}}$，得$b_2<b_6$，故 C 错误；

$a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\frac{1}{a_4}}}>a_1+\frac{1}{a_2+\cdots+\frac{1}{a_6+\frac{1}{a_7}}}$，得$b_4<b_7$，故 D 正确.

故选 D.

5 、【答案】 B;

【解析】 由题意得，$F(1,0)$，则$|AF|=|BF|=2$，即点 A 到准线 $x=-1$ 的距离为 2，

所以点 A 的横坐标为$-1+2=1$，不妨设点 A 在 x 轴上方，代入得，$A(1,2)$，

所以$|AB|=\sqrt{(3-1)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{2}$.

故选：B.

6 、【答案】 B;

【解析】 执行第一次循环，$b=b+2a=1+2=3$，$a=b-a=3-1=2,n=n+1=2$，

$\left|\frac{b^2}{a^2}-2\right|=\left|\frac{3^2}{2^2}-2\right|=\frac{1}{4}>0.01$；

执行第二次循环，$b=b+2a=3+4=7$，$a=b-a=7-2=5,n=n+1=3$，

$\left|\frac{b^2}{a^2}-2\right|=\left|\frac{7^2}{5^2}-2\right|=\frac{1}{25}>0.01$；

执行第三次循环，$b=b+2a=7+10=17$，$a=b-a=17-5=12,n=n+1=4$，

$\left|\frac{b^2}{a^2}-2\right|=\left|\frac{17^2}{12^2}-2\right|=\frac{1}{144}<0.01$，此时输出 $n=4$.

故选：B.

7 、【答案】 A;

【解析】 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AC\perp BD$ 且 $DD_1\perp$平面 $ABCD$，

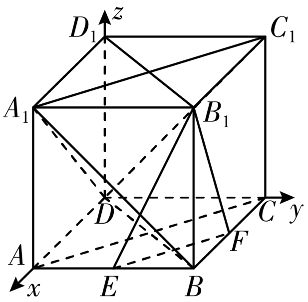
又 $EF \subset$平面 $ABCD$，所以 $EF \perp DD_1$，

因为 E，F 分别为 AB，BC 的中点，所以 $EF//AC$，所以 $EF \perp BD$，

又 $BD \cap DD_1 = D$，所以 $EF \perp$平面 BDD_1，

又 $EF \subset$平面B_1EF，所以平面$B_1EF \perp$平面 BDD_1，故 A 正确；

如图，以点 D 为原点，分别以 AD、DC、DD_1所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系，



设 $AB = 2$，则$B_1(2,2,2)$，$E(2,1,0)$，$F(1,2,0)$，$B(2,2,0)$，$A_1(2,0,2)$，$A(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$C_1(0,2,2)$，

则$\overrightarrow{EF} = (-1,1,0)$，$\overrightarrow{EB_1} = (0,1,2)$，$\overrightarrow{DB} = (2,2,0)$，$\overrightarrow{DA_1} = (2,0,2)$，$\overrightarrow{AA_1} = (0,0,2)$，$\overrightarrow{AC} = (-2,2,0)$，$\overrightarrow{A_1C_1} = (-2,2,0)$，

设平面B_1EF 的法向量为$\overrightarrow{m} = (x_1,y_1,z_1)$，

则有$\begin{cases} \overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{EF} = -x_1 + y_1 = 0 \\ \overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{EB_1} = y_1 + 2z_1 = 0 \end{cases}$，可取$\overrightarrow{m} = (2,2,-1)$，

同理可得平面A_1BD 的法向量为$\overrightarrow{n_1} = (1,-1,-1)$，平面$A_1AC$ 的法向量为$\overrightarrow{n_2} = (1,1,0)$，平面$A_1C_1D$ 的法向量为$\overrightarrow{n_3} = (1,1,-1)$，

则$\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{n_1} = 2 - 2 + 1 = 1 \neq 0$，

所以平面B_1EF 与平面A_1BD 不垂直，故 B 错误；

因为$\overrightarrow{m}$与$\overrightarrow{n_2}$不平行，所以平面B_1EF 与平面A_1AC 不平行，故 C 错误；

因为$\overrightarrow{m}$与$\overrightarrow{n_3}$不平行，所以平面B_1EF 与平面A_1C_1D 不平行，故 D 错误，故选：A.

8 、【答案】 D;

【解析】 解：设等比数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公比为 q，$q \neq 0$，若 $q = 1$，则$a_2 - a_5 = 0$，与题意矛盾，

所以 $q \neq 1$，则$\begin{cases} a_1+a_2+a_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=168 \\ a_2-a_5=a_1q-a_1q^4=42 \end{cases}$，解得$\begin{cases} a_1=96 \\ q=\frac{1}{2} \end{cases}$，

所以$a_6=a_1q^5=3$．故选：D.

9 、【答案】 C;

【解析】 设该四棱锥底面为四边形 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 所在小圆半径为 r，

设四边形 $ABCD$ 对角线夹角为α，

则$S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD\cdot \sin\alpha \leqslant \frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD \leqslant \frac{1}{2}\cdot 2r\cdot 2r=2r^2$（当且仅当四边形 $ABCD$ 为正方形时等号成立），

即当四棱锥的顶点 O 到底面 $ABCD$ 所在小圆距离一定时，底面 $ABCD$ 面积最大值为 $2r^2$，

又$r^2+h^2=1$(h 为四棱锥的高)，

则$V_{O-ABCD}=\frac{1}{3}\cdot 2r^2\cdot h=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{r^2\cdot r^2\cdot 2h^2} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\left(\frac{r^2+r^2+2h^2}{3}\right)^3}=\frac{4\sqrt{3}}{27}$,

当且仅当$r^2=2h^2$，即 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}$时等号成立，

故选：C.

10 、【答案】 D;

【解析】 该棋手连胜两盘，则第二盘为必胜盘，

记该棋手在第二盘与甲比赛，且连胜两盘的概率为$p_{甲}$,

则$p_{甲}=2(1-p_2)p_1p_3+2p_2p_1(1-p_3)=2p_1(p_2+p_3)-4p_1p_2p_3$,

记该棋手在第二盘与乙比赛，且连胜两盘的概率为$p_{乙}$,

则$p_{乙}=2(1-p_1)p_2p_3+2p_1p_2(1-p_3)=2p_2(p_1+p_3)-4p_1p_2p_3$,

记该棋手在第二盘与丙比赛，且连胜两盘的概率为$p_{丙}$,

则$p_{丙}=2(1-p_1)p_3p_2+2p_1p_3(1-p_2)$

$=2p_3(p_1+p_2)-4p_1p_2p_3$,

则$p_{甲}-p_{乙}=2p_1(p_2+p_3)-4p_1p_2p_3-[2p_2(p_1+p_3)-4p_1p_2p_3]$

$=2(p_1-p_2)p_3<0$,

$p_{乙}-p_{丙}=2p_2(p_1+p_3)-4p_1p_2p_3-[2p_3(p_1+p_2)-4p_1p_2p_3]$

$=2(p_2-p_3)p_1<0$，

即$p_{甲}<p_{乙}$，$p_{乙}<p_{丙}$，

则该棋手在第二盘与丙比赛，p 最大．

综上，选项 D 判断正确；选项 BC 判断错误；

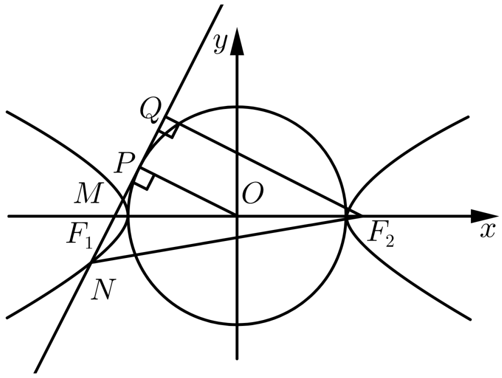
p 与该棋手与甲、乙、丙的比赛次序有关，选项 A 判断错误．

故选：D．

11 、【答案】 A;C;

【解析】 依题意不妨设双曲线焦点在 x 轴，

如图，当两个交点 M，N 同在双曲线的左支上时，



设切点为 P，连接 OP，则 $OP\perp MN$，$|OP|=a$，$|OF_1|=c$，$|PF_1|=b$，

作$F_2Q//OP$ 交 MN 于点 Q，则$F_2Q\perp MN$，$|F_2Q|=2|OP|=2a$，$|QF_1|=2|PF_1|=2b$，

依题意，$\cos\angle F_1NF_2=\frac{3}{5}$，可得 $\sin\angle F_1NF_2=\frac{|QF_2|}{|NF_2|}=\frac{2a}{|NF_2|}=\frac{4}{5}$，则$|NF_2|=\frac{5a}{2}$，$|NQ|=\frac{3a}{2}$，

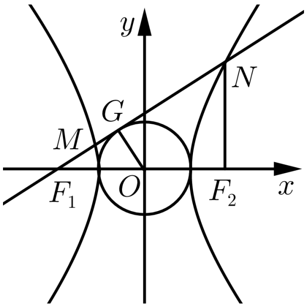
所以$|NF_1|=|NQ|-|QF_1|=\frac{3a}{2}-2b$，

所以$|NF_2|-|NF_1|=a+2b=2a$，

即 $a=2b$，

所以 $e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$;

如图，当两个交点 M，N 在双曲线的两支上时，



过F_1作圆 D 的切线，切点为 G，所以 $OG \perp NF_1$，

因为 $\cos\angle F_1NF_2=\frac{3}{5}>0$，

所以 N 在双曲线的右支，所以$|OG|=a$，$|OF_1|=c$，$|GF_1|=b$，

设$\angle F_1NF_2=\alpha$，$\angle F_2F_1N=\beta$，

由 $\cos\angle F_1NF_2=\frac{3}{5}$，即 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，

则 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\sin\beta=\frac{a}{c}$，$\cos\beta=\frac{b}{c}$，

在$\triangle F_2F_1N$ 中，$\sin\angle F_1F_2N=\sin(\pi-\alpha-\beta)=\sin(\alpha+\beta)$

$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}\times\frac{b}{c}+\frac{3}{5}\times\frac{a}{c}=\frac{3a+4b}{5c}$，

由正弦定理得$\frac{2c}{\sin\alpha}=\frac{|NF_2|}{\sin\beta}=\frac{|NF_1|}{\sin\angle F_1F_2N}=\frac{5c}{2}$，

所以$|NF_1|=\frac{5c}{2}\sin\angle F_1F_2N=\frac{5c}{2}\times\frac{3a+4b}{5c}=\frac{3a+4b}{2}$，

$|NF_2|=\frac{5c}{2}\sin\beta=\frac{5c}{2}\times\frac{a}{c}=\frac{5a}{2}$，

又$|NF_1|-|NF_2|=\frac{3a+4b}{2}-\frac{5a}{2}=\frac{4b-2a}{2}=2a$，

所以 $2b=3a$，即$\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$，

所以双曲线的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

故选：AC.

12 、【答案】 D;

【解析】 因为 $y=g(x)$的图像关于直线 $x=2$ 对称，所以 $g(2-x)=g(x+2)$，

因为 $g(x)-f(x-4)=7$，所以 $g(x+2)-f(x-2)=7$，

即 $g(x+2)=7+f(x-2)$，

因为 $f(x)+g(2-x)=5$，所以 $f(x)+g(x+2)=5$，

代入得 $f(x)+[7+f(x-2)]=5$，

即 $f(x)+f(x-2)=-2$，

所以 $f(3)+f(5)+\cdots+f(21)=(-2)\times 5=-10$，$f(4)+f(6)+\cdots+f(22)=(-2)\times 5=-10$.

因为 $f(x)+g(2-x)=5$，所以 $f(0)+g(2)=5$，即 $f(0)=1$，

所以 $f(2)=-2-f(0)=-3$.

因为 $g(x)-f(x-4)=7$，所以 $g(x+4)-f(x)=7$，

又因为 $f(x)+g(2-x)=5$，联立得，$g(2-x)+g(x+4)=12$，

所以 $y=g(x)$的图像关于点$(3,6)$中心对称，

因为函数 $g(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，所以 $g(3)=6$.

因为 $f(x)+g(x+2)=5$，所以 $f(1)=5-g(3)=-1$.

所以$\sum_{k=1}^{22} f(k)=f(1)+f(2)+[f(3)+f(5)+\cdots+f(21)]+[f(4)+f(6)+\cdots+f(22)]$

$=-1-3-10-10=-24$.

故选：D.

13 、【答案】 $\frac{3}{10}$或 0.3

;

【解析】 从 5 名同学中随机选 3 名的方法数为$C_5^3=10$，甲、乙都入选的方法数为$C_3^1=3$，

所以甲、乙都入选的概率 $P=\frac{3}{10}$.

故答案为：$\frac{3}{10}$.

14 、【答案】 $(x-2)^2+(y-3)^2=13$ 或$(x-2)^2+(y-1)^2=5$ 或$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{7}{3}\right)^2=\frac{65}{9}$或$\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+(y-1)^2=\frac{169}{25}$

;

【解析】 依题意设圆的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

若过$(0,0)$，$(4,0)$，$(-1,1)$，则$\begin{cases} F=0 \\ 16+4D+F=0 \\ 1+1-D+E+F=0 \end{cases}$，

解得$\begin{cases} F=0 \\ D=-4 \\ E=-6 \end{cases}$，

所以圆的方程为$x^2+y^2-4x-6y=0$，即$(x-2)^2+(y-3)^2=13$；

若过$(0,0)$，$(4,0)$，$(4,2)$，则$\begin{cases} F=0 \\ 16+4D+F=0 \\ 16+4+4D+2E+F=0 \end{cases}$，

解得$\begin{cases} F=0 \\ D=-4 \\ E=-2 \end{cases}$，

所以圆的方程为$x^2+y^2-4x-2y=0$，即$(x-2)^2+(y-1)^2=5$；

若过$(0,0)$，$(-1,1)$，$(4,2)$，则$\begin{cases} F=0 \\ 1+1-D+E+F=0 \\ 16+4+4D+2E+F=0 \end{cases}$，

解得$\begin{cases} F=0 \\ D=-\frac{8}{3} \\ E=-\frac{14}{3} \end{cases}$，

所以圆的方程为$x^2+y^2-\frac{8}{3}x-\frac{14}{3}y=0$，即$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{7}{3}\right)^2=\frac{65}{9}$；

若过$(-1,1)$，$(4,0)$，$(4,2)$，则$\begin{cases} 1+1-D+E+F=0 \\ 16+4D+F=0 \\ 16+4+4D+2E+F=0 \end{cases}$，

解得$\begin{cases} F=-\frac{16}{5} \\ D=-\frac{16}{5} \\ E=-2 \end{cases}$，

所以圆的方程为$x^2+y^2-\frac{16}{5}x-2y-\frac{16}{5}=0$，

即$\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+(y-1)^2=\frac{169}{25}$；

故答案为：$(x-2)^2+(y-3)^2=13$或$(x-2)^2+(y-1)^2=5$或$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{7}{3}\right)^2=\frac{65}{9}$或$\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+(y-1)^2=\frac{169}{25}$.

15 、【答案】 3;

【解析】 解： 函数$f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$（$\omega>0$，$0<\varphi<\pi$）的最小正周期$T=\frac{2\pi}{\omega}$,

因为 $f(T)=\cos\left(\omega\cdot\frac{2\pi}{\omega}+\varphi\right)=\cos(2\pi+\varphi)=\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$0<\varphi<\pi$，

所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$，即 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，

又 $x=\frac{\pi}{9}$为 $f(x)$的零点，

所以$\frac{\pi}{9}\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得$\omega=3+9k,k\in\mathbf{Z}$，

因为$\omega>0$，所以当 $k=0$ 时，$\omega_{min}=3$．

故答案为：3．

16 、【答案】 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},1\right)$;

【解析】 解：$f'(x)=2\ln a\cdot a^x-2\mathrm{e}x$，

因为x_1,x_2分别是函数 $f(x)=2a^x-\mathrm{e}x^2$的极小值点和极大值点，

所以函数 $f(x)$在$(-\infty,x_1)$和$(x_2,+\infty)$上单调递减，在(x_1,x_2)上单调递增，

所以当 $x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$时，$f'(x)<0$，

当 $x\in(x_1,x_2)$时，$f'(x)>0$，

若 $a>1$，当 $x<0$ 时，$2\ln a\cdot a^x>0,2\mathrm{e}x<0$，

则此时$f'(x)>0$，与前面矛盾，故 $a>1$ 不符合题意，

若 $0<a<1$，则方程 $2\ln a\cdot a^x-2\mathrm{e}x=0$ 的两个根为x_1,x_2，即方程 $\ln a\cdot a^x=\mathrm{e}x$ 的两个根为 x_1,x_2，

即函数 $y=\ln a\cdot a^x$与函数 $y=\mathrm{e}x$ 的图象有两个不同的交点，

令 $g(x)=\ln a\cdot a^x$，则$g'(x)=(\ln a)^2\cdot a^x,0<a<1$，

设过原点且与函数 $y=g(x)$的图象相切的直线的切点为$(x_0,\ln a\cdot a^{x_0})$，

则切线的斜率为$g'(x_0)=(\ln a)^2\cdot a^{x_0}$，

故切线方程为 $y-\ln a\cdot a^{x_0}=(\ln a)^2\cdot a^{x_0}(x-x_0)$，

则有$-\ln a\cdot a^{x_0}=-x_0(\ln a)^2\cdot a^{x_0}$，解得$x_0=\frac{1}{\ln a}$，

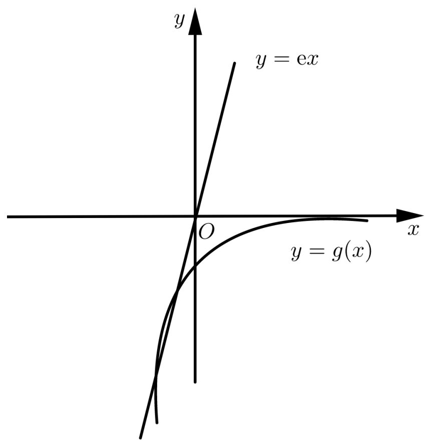
则切线的斜率为 $k=(\ln a)^2\cdot a^{\frac{1}{\ln a}}=\mathrm{e}(\ln \mathrm{a})^2$，

因为函数 $y=\ln a\cdot a^x$与函数 $y=\mathrm{e}x$ 的图象有两个不同的交点，

所以 $\mathrm{e}(\ln \mathrm{a})^2<\mathrm{e}$，解得$\frac{1}{\mathrm{e}}<a<\mathrm{e}$，

又 $0<a<1$，所以$\frac{1}{\mathrm{e}}<a<1$，

综上所述，a 的取值范围为$\left(\frac{1}{\mathrm{e}},1\right)$.



17 、【答案】 (1) 见解析

;

(2) 14

;

【解析】 (1) 证明：因为 $\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin(C-A)$，

所以 $\sin C\sin A\cos B-\sin C\sin B\cos A=\sin B\sin C\cos A-\sin B\sin A\cos C$，

所以 $ac\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-2bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$,

即$\frac{a^2+c^2-b^2}{2}-(b^2+c^2-a^2)=-\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$,

所以 $2a^2=b^2+c^2$.

(2) 解：因为 $a=5,\cos A=\frac{25}{31}$,

所以由（1）得$b^2+c^2=2a^2=50$，

由余弦定理可得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

即 $50-\frac{50}{31}bc=25$ ，

所以 $bc=\frac{31}{2}$,

故 $(b+c)^2=b^2+c^2+2bc=50+31=81$,

所以 $b+c=9$，

所以$\triangle ABC$的周长为$a+b+c=14$.

18、【答案】(1) 见解析

;

(2) $\frac{4\sqrt{3}}{7}$

;

【解析】(1) 因为$AD=CD$，E为AC的中点，所以$AC\perp DE$.

在$\triangle ABD$和$\triangle CBD$中，因为$AD=CD$，$\angle ADB=\angle CDB$，$DB=DB$，

所以$\triangle ABD\cong\triangle CBD$，所以$AB=CB$，又因为$E$为$AC$的中点，所以$AC\perp BE$.

又因为DE，$BE\subset$平面BED，$DE\cap BE=E$，所以$AC\perp$平面BED，

因为$AC\subset$平面ACD，所以平面$BED\perp$平面ACD.

(2) 连接EF，由（1）知，$AC\perp$平面BED，因为$EF\subset$平面BED，

所以$AC\perp EF$，所以$S_{\triangle AFC}=\frac{1}{2}AC\cdot EF$，

当$EF\perp BD$时，EF最小，即$\triangle AFC$的面积最小，

因为$\triangle ABD\cong\triangle CBD$，所以$CB=AB=2$，

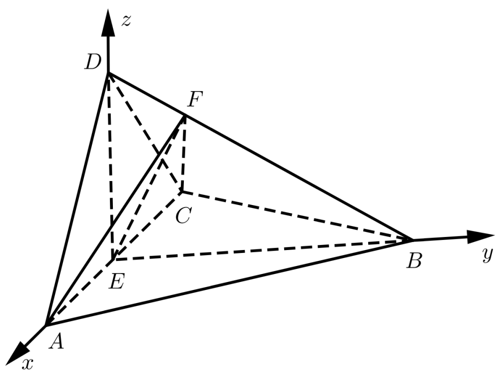
又因为$\angle ACB=60°$，所以$\triangle ABC$是等边三角形，

因为E为AC的中点，所以$AE=EC=1$，$BE=\sqrt{3}$，

因为$AD\perp CD$，所以$DE=\frac{1}{2}AC=1$，

在$\triangle DEB$中，$DE^2+BE^2=BD^2$，所以$BE\perp DE$.

所以以E为原点，以EA、EB、ED所在直线分别为x轴、y轴、z轴建立如图所示的空间直角坐标系$E-xyz$，



则 $A(1,0,0)$，$B\left(0,\sqrt{3},0\right)$，$D(0,0,1)$，

所以$\overrightarrow{AD}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{AB}=\left(-1,\sqrt{3},0\right)$，

设平面 ABD 的法向量为$\overrightarrow{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AD}=-x+z=0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-x+\sqrt{3}y=0\end{cases}$，取 $y=\sqrt{3}$，则$\overrightarrow{n}=\left(3,\sqrt{3},3\right)$，

又因为 $C(-1,0,0)$，$F\left(0,\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{3}{4}\right)$，所以$\overrightarrow{CF}=\left(1,\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{3}{4}\right)$，

所以 $\cos\left\langle\overrightarrow{n},\overrightarrow{CF}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{CF}}{\left|\overrightarrow{n}\right|\left|\overrightarrow{CF}\right|}=\frac{6}{\sqrt{21}\times\sqrt{\frac{7}{4}}}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$,

设 CF 与平面 ABD 所成的角为$\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$,

所以 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{n},\overrightarrow{CF}\right\rangle\right|=\frac{4\sqrt{3}}{7}$,

所以 CF 与平面 ABD 所成的角的正弦值为$\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

19 、【答案】 (1) $0.06\mathrm{m}^2$；$0.39\mathrm{m}^3$

;

(2) 0.97

;

(3) $1209\mathrm{m}^3$

;

【解析】 (1) 样本中 10 棵这种树木的根部横截面积的平均值 $\overline{x}=\frac{0.6}{10}=0.06\mathrm{m}^2$，

样本中 10 棵这种树木的材积量的平均值 $\overline{y}=\frac{3.9}{10}=0.39\mathrm{m}^3$，

据此可估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积为 $0.06\mathrm{m}^2$，

平均一棵的材积量为 $0.39\mathrm{m}^3$.

(2) $r=\frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{10}(y_i-\overline{y})^2}}=\frac{\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-10\overline{xy}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{10}x_i^2-10\overline{x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{10}y_i^2-10\overline{y}^2\right)}}$

$=\frac{0.2474-10\times0.06\times0.39}{\sqrt{(0.038-10\times0.06^2)(1.6158-10\times0.39^2)}}=\frac{0.0134}{\sqrt{0.0001896}}\approx\frac{0.0134}{0.01377}\approx0.97$.

(3) 设该林区这种树木的总材积量的估计值为 $Y\mathrm{m}^3$，

又已知树木的材积量与其根部横截面积近似成正比，

则$\frac{0.06}{0.39}=\frac{186}{Y}$ ，解得 $Y=1209$，

则该林区这种树木的总材积量估计值为 $1209\mathrm{m}^3$.

20 、【答案】 (1) $\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$

;

(2) $(0,-2)$

;

【解析】 (1) 设椭圆 E 的方程为 $mx^2+ny^2=1$，过 $A(0,-2)$，$B\left(\frac{3}{2},-1\right)$，

则$\begin{cases}4n=1\\ \frac{9}{4}m+n=1\end{cases}$，解得 $m=\frac{1}{3}$，$n=\frac{1}{4}$，

所以椭圆 E 的方程为$\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$.

(2) $\because A(0,-2)$，$B\left(\frac{3}{2},-1\right)$，$\therefore$直线 AB:$y+2=\frac{2}{3}x$，

①当过点 $P(1,-2)$的直线斜率不存在时，直线方程为 $x=1$，代入$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$，

可得 $y=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$,

$\because$过 M 且平行于 x 轴的直线与线段 AB 有交点，$\therefore -2<y_M<-1$，

$\therefore M\left(1,-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，$N\left(1,\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，

将 $y=-\frac{2\sqrt{6}}{3}$代入 AB 方程 $y=\frac{2}{3}x-2$，得 $T\left(3-\sqrt{6},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，

由$\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$，得 $H\left(-2\sqrt{6}+5,-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，

则直线 HN 的方程：$y=\left(2+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)x-2$，过点$(0,-2)$.

②当过点 $P(1,-2)$的直线斜率存在时，设 $kx-y-(k+2)=0$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases}kx-y-(k+2)=0\\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$，得$(3k^2+4)x^2-6k(2+k)x+3k(k+4)=0$，

$\therefore\begin{cases}x_1+x_2=\frac{6k(2+k)}{3k^2+4}\\ x_1x_2=\frac{3k(4+k)}{3k^2+4}\end{cases}$，$\begin{cases}y_1+y_2=\frac{-8(2+k)}{3k^2+4}\\ y_1y_2=\frac{4(4+4k-2k^2)}{3k^2+4}\end{cases}$,

且$x_1y_2+x_2y_1=\frac{-24k}{3k^2+4}$（*），

联立$\begin{cases} y=y_1 \\ y=\frac{2}{3}x-2 \end{cases}$，$T\left(\frac{3y_1}{2}+3,y_1\right)$，$H(3y_1+6-x_1,y_1)$.

可求得此时 $HN:y-y_2=\frac{y_1-y_2}{3y_1+6-x_1-x_2}(x-x_2)$，

将$(0,-2)$代入整理得 $2(x_1+x_2)-6(y_1+y_2)+x_1y_2+x_2y_1-3y_1y_2-12=0$，

将（*）代入，得 $24k+12k^2+96+48k-24k-48-48k+24k^2-36k^2-48=0$，

显然成立.

综上，直线 HN 过定点$(0,-2)$.

21 、【答案】 (1) $y=2x$

;

(2) $(-\infty,-1)$

;

【解析】 (1) 由题意得 $f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$，

当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln(1+x)+\frac{x}{e^x}$，$f(0)=0$，

所以切点为$(0,0)$，$f'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1-x}{e^x}$,

$f'(0)=2$，

所以切线斜率为 2，

所以曲线 $y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为 $y=2x$.

(2) $f(x)=\ln(1+x)+\frac{ax}{e^x}$,

$f'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{a(1-x)}{e^x}=\frac{e^x+a(1-x^2)}{(1+x)e^x}$,

设 $g(x)=e^x+a(1-x^2)$.

1°若 $a>0$，

当 $x\in(-1,0)$时，$g(x)=e^x+a(1-x^2)>0$，即$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$在$(-1,0)$上单调递增，$f(x)<f(0)=0$，

故 $f(x)$在$(-1,0)$上没有零点，不符合题意；

2°若$-1\leqslant a\leqslant 0$，当 $x\in(0,+\infty)$时，

$g'(x)=\mathrm{e}^x-2ax>0$，所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

所以 $g(x)>g(0)=1+a\geqslant 0$，即$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，$f(x)>f(0)=0$，

故 $f(x)$在$(0,+\infty)$上没有零点，不符合题意；

3°若 $a<-1$，

①当 $x\in(0,+\infty)$时，$g'(x)=\mathrm{e}^x-2ax>0$，

所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，$g(0)=1+a<0,g(1)=\mathrm{e}>0$，

所以存在 $m\in(0,1)$，使得 $g(m)=0$，即$f'(m)=0$，

当 $x\in(0,m)$时，$f'(x)<0,f(x)$在$(0,m)$上单调递减，

当 $x\in(m,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(m,+\infty)$上单调递增，

所以当 $x\in(0,m)$时，$f(x)<f(0)=0$，当 $x\to+\infty$时，$f(x)\to+\infty$，

所以 $f(x)$在$(m,+\infty)$上有唯一零点，

又 $f(x)$在$(0,m)$上没有零点，所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$上有唯一零点.

②当 $x\in(-1,0)$时，设 $h(x)=g'(x)=\mathrm{e}^x-2ax$，则$h'(x)=\mathrm{e}^x-2a>0$，

所以$g'(x)$在$(-1,0)$上单调递增，$g'(-1)=\frac{1}{\mathrm{e}}+2a<0$，$g'(0)=1>0$，

所以存在 $n\in(-1,0)$，使得$g'(n)=0$，

当 $x\in(-1,n)$时，$g'(x)<0,g(x)$在$(-1,n)$上单调递减，

当 $x\in(n,0)$时，$g'(x)>0,g(x)$在$(n,0)$上单调递增，此时 $g(x)<g(0)=1+a<0$，

又 $g(-1)=\frac{1}{\mathrm{e}}>0$，

所以存在 $t\in(-1,n)$，使得 $g(t)=0$，即$f'(t)=0$，

当 $x\in(-1,t)$时，$f(x)$单调递增，当 $x\in(t,0)$时，$f(x)$单调递减，

有 $x\to-1,f(x)\to-\infty$，而 $f(0)=0$，

所以当 $x\in(t,0)$时，$f(x)>0$，

所以 $f(x)$在$(-1,t)$上有唯一零点，在$(t,0)$上无零点，即 $f(x)$在$(-1,0)$上有唯一零点，

所以 $a<-1$，符合题意，

综上，若 $f(x)$在区间$(-1,0),(0,+\infty)$内各恰有一个零点，则 a 的取值范围为$(-\infty,-1)$.

22 、【答案】 (1) $\sqrt{3}x+y+2m=0$

;

(2) $-\frac{19}{12}\leqslant m\leqslant\frac{5}{2}$

;

【解析】 (1) 因为 l：$\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+m=0$，所以$\frac{1}{2}\rho\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\cos\theta+m=0$，

又因为$\rho\sin\theta=y$，$\rho\cos\theta=x$，

所以化简为$\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}x+m=0$，整理得 l 的直角坐标方程：$\sqrt{3}x+y+2m=0$.

(2) 联立 l 与 C 的方程，

即将 $x=\sqrt{3}\cos 2t$，$y=2\sin t$(t 为参数)代入$\sqrt{3}x+y+2m=0$ 中，

可得 $3\cos 2t+2\sin t+2m=0$，

所以 $3(1-2\sin^2 t)+2\sin t+2m=0$，

化简为$-6\sin^2 t+2\sin t+3+2m=0$，

要使 l 与 C 有公共点，则 $2m=6\sin^2 t-2\sin t-3$ 有解，

令 $\sin t=a$，则 $a\in[-1,1]$，令 $f(a)=6a^2-2a-3\ (-1\leqslant a\leqslant 1)$，

对称轴为 $a=\frac{1}{6}$，开口向上，

所以 $f(a)_{max}=f(-1)=6+2-3=5$，

$f(a)_{min}=f(\frac{1}{6})=\frac{1}{6}-\frac{2}{6}-3=-\frac{19}{6}$，

所以$-\frac{19}{6}\leqslant 2m\leqslant 5$，

所以 m 的取值范围为$-\frac{19}{12}\leqslant m\leqslant\frac{5}{2}$.

23 、【答案】 (1) 证明见解析

;

(2) 证明见解析

;

【解析】 (1) 证明：因为 $a>0$，$b>0$，$c>0$，则$a^{\frac{3}{2}}>0$，$b^{\frac{3}{2}}>0$，$c^{\frac{3}{2}}>0$，

所以$\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}}{3}\geqslant\sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{\frac{3}{2}}\cdot c^{\frac{3}{2}}}$，

即$(abc)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{3}$，所以 $abc\leqslant\frac{1}{9}$，

当且仅当$a^{\frac{3}{2}}=b^{\frac{3}{2}}=c^{\frac{3}{2}}$，即 $a=b=c=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$时取等号.

(2) 证明：因为 $a>0$，$b>0$，$c>0$，

所以 $b+c\geqslant2\sqrt{bc}$，$a+c\geqslant2\sqrt{ac}$，$a+b\geqslant2\sqrt{ab}$，

所以$\frac{a}{b+c}\leqslant\frac{a}{2\sqrt{bc}}=\frac{a^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}$，$\frac{b}{a+c}\leqslant\frac{b}{2\sqrt{ac}}=\frac{b^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}$，$\frac{c}{a+b}\leqslant\frac{c}{2\sqrt{ab}}=\frac{c^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}$，

所以$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\leqslant\frac{a^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}+\frac{b^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}+\frac{c^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}=\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}=\frac{1}{2\sqrt{abc}}$，当且仅当 $a=b=c$ 时取等号.