2022年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数学

本试卷共5页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．已知全集$U=\{x|-3<x<3\}$，集合$A=\{x|-2<x\le 1\}$，则$\complement_U A=$（　　）

A．$(-2,1]$　　B．$(-3,-2)\cup[1,3)$　　C．$[-2,1)$　　D．$(-3,-2]\cup(1,3)$

2．若复数z满足$i\cdot z=3-4i$，则$|z|=$（　　）

A．1　　B．5　　C．7　　D．25

3．若直线$2x+y-1=0$是圆$(x-a)^2+y^2=1$的一条对称轴，则$a=$（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．1　　D．-1

4．已知函数$f(x)=\frac{1}{1+2^x}$，则对任意实数x，有（　　）

A．$f(-x)+f(x)=0$　　B．$f(-x)-f(x)=0$

C．$f(-x)+f(x)=1$　　D．$f(-x)-f(x)=\frac{1}{3}$

5．已知函数$f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$，则（　　）

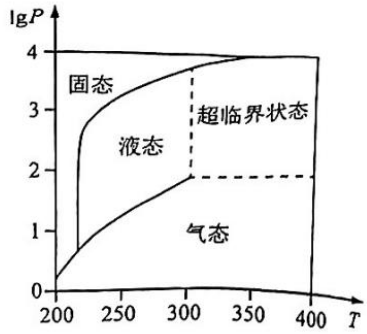
A．$f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right)$上单调递减　　B．$f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{12}\right)$上单调递增

C．$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$上单调递减　　D．$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{12}\right)$上单调递增

6. 设$\{a_n\}$是公差不为0的无穷等差数列，则"$\{a_n\}$为递增数列"是"存在正整数N_0，当$n>N_0$时，$a_n>0$"的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件　　C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

7．在北京冬奥会上，国家速滑馆“冰丝带”使用高效环保的二氧化碳跨临界直冷制冰技术，为实现绿色冬奥作出了贡献．如图描述了一定条件下二氧化碳所处的状态与 T 和 $\lg P$ 的关系，其中 T 表示温度，单位是K；P 表示压强，单位是 bar．下列结论中正确的是（　　）



A．当 $T=220$，$P=1026$ 时，二氧化碳处于液态

B．当 $T=270$，$P=128$ 时，二氧化碳处于气态

C．当 $T=300$，$P=9987$ 时，二氧化碳处于超临界状态

D．当 $T=360$，$P=729$ 时，二氧化碳处于超临界状态

8．若 $(2x-1)^4=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，则 $a_0+a_2+a_4=$（　　）

A．40　　B．41　　C．-40　　D．-41

9．已知正三棱锥 $P-ABC$ 的六条棱长均为 6，S 是 $\triangle ABC$ 及其内部的点构成的集合．设集合 $T=\{Q\in S \mid PQ\le 5\}$，则 T 表示的区域的面积为（　　）

A．$\frac{3\pi}{4}$　　B．π　　C．2π　　D．3π

10．在 $\triangle ABC$ 中，$AC=3, BC=4, \angle C=90^\circ$．$P$ 为 $\triangle ABC$ 所在平面内的动点，且 $PC=1$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的取值范围是（　　）

A．$[-5,3]$　　B．$[-3,5]$　　C．$[-6,4]$　　D．$[-4,6]$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11．函数 $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{1-x}$ 的定义域是_________.

12．已知双曲线 $y^2+\frac{x^2}{m}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，则 $m=$__________.

13．若函数 $f(x)=A\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的一个零点为 $\dfrac{\pi}{3}$，则 $A=$________；$f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=$________.

14．设函数 $f(x)=\begin{cases}-ax+1, & x<a,\\ (x-2)^2, & x\geq a.\end{cases}$ 若 $f(x)$ 存在最小值，则 a 的一个取值为________；a 的最大值为___________.

15．已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，其前 n 项和 S_n 满足 $a_n\cdot S_n=9(n=1,2,\cdots)$．给出下列四个结论：

①$\{a_n\}$ 的第 2 项小于 3；　②$\{a_n\}$ 为等比数列；

③$\{a_n\}$ 为递减数列；　④$\{a_n\}$ 中存在小于 $\dfrac{1}{100}$ 的项.

其中所有正确结论的序号是__________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16．（本小题 13 分）

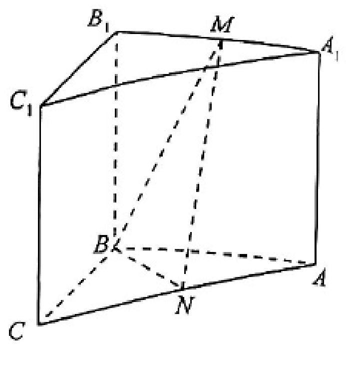
在 $\triangle ABC$ 中，$\sin 2C=\sqrt{3}\sin C$．

（I）求 $\angle C$；

（II）若 $b=6$，且 $\triangle ABC$ 的面积为 $6\sqrt{3}$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

17．（本小题 14 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 BCC_1B_1 为正方形，平面 $BCC_1B_1\perp$ 平面 ABB_1A_1，$AB=BC=2$，M，N 分别为 A_1B_1，AC 的中点.



（I）求证：$MN\,//$ 平面 BCC_1B_1；

（II）再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求直线 AB 与平面 BMN 所成角的正弦值.

条件①：$AB\perp MN$；

条件②：$BM=MN$．

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分．

18．（本小题 13 分）

在校运动会上，只有甲、乙、丙三名同学参加铅球比赛，比赛成绩达到 9.50m 以上（含 9.50m ）的同学将获得优秀奖．为预测获得优秀奖的人数及冠军得主，收集了甲、乙、丙以往的比赛成绩，并整理得到如下数据（单位：m）：

甲：9.80，9.70，9.55，9.54，9.48，9.42，9.40，9.35，9.30，9.25；

乙：9.78，9.56，9.51，9.36，9.32，9.23；

丙：9.85，9.65，9.20，9.16．

假设用频率估计概率，且甲、乙、丙的比赛成绩相互独立．

（I）估计甲在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的概率；

（II）设 X 是甲、乙、丙在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的总人数，估计 X 的数学期望 EX；

（III）在校运动会铅球比赛中，甲、乙、丙谁获得冠军的概率估计值最大？（结论不要求证明）

19．（本小题 15 分）

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点为 $A(0,1)$，焦距为 $2\sqrt{3}$．

（I）求椭圆 E 的方程；

（II）过点 $P(-2,1)$ 作斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 B，C，直线 AB，AC 分别与 x 轴交于点 M，N，当 $|MN|=2$ 时，求 k 的值．

20．（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x\ln(1+x)$．

（I）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（II）设 $g(x)=f'(x)$，讨论函数 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的单调性；

（III）证明：对任意的 $s,t\in(0,+\infty)$，有 $f(s+t)>f(s)+f(t)$．

21．（本小题 15 分）

已知 $Q:a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为有穷整数数列．给定正整数 m，若对任意的 $n\in\{1,2,\cdots,m\}$，在 Q 中存在 $a_i,a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_{i+j}(j\geq 0)$，使得 $a_i+a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_{i+j}=n$，则称 Q 为 $m-$连续可表数列．

（I）判断 $Q:2,1,4$ 是否为 $5-$连续可表数列？是否为 $6-$连续可表数列？说明理由；

（II）若 $Q: a_1, a_2, \cdots, a_k$ 为 $8-$ 连续可表数列，求证：k 的最小值为 4；

（III）若 $Q: a_1, a_2, \cdots, a_k$ 为 $20-$ 连续可表数列，且 $a_1+a_2+\cdots+a_k<20$，求证：$k \geq 7$.

2022 年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数学参考答案

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. D　2. B　3. A　4. C　5. C　6. C　7. D　8. B　9. B　10. D

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．

11. $(-\infty, 0) \cup (0,1]$

12. -3

13. ①. 1　　②. $-\sqrt{2}$

14. ①. 0（答案不唯一）　　②. 1

15.①③④

三、解答题共 6 小愿，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16.（1）$\frac{\pi}{6}$

（2）$6+6\sqrt{3}$

17.（1）取 AB 的中点为 K，连接 MK,NK，

由三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 可得四边形 ABB_1A_1 为平行四边形，

而 $B_1M=MA_1, BK=KA$，则 $MK//BB_1$，

而 $MK\not\subset$ 平面 CBB_1C_1，$BB_1\subset$ 平面 CBB_1C_1，故 $MK//$ 平面 CBB_1C_1，

而 $CN=NA, BK=KA$，则 $NK//BC$，同理可得 $NK//$ 平面 CBB_1C_1，

而 $NK\bigcap MK=K, NK, MK\subset$ 平面 MKN，

故平面 $MKN//$ 平面 CBB_1C_1，而 $MN\subset$ 平面 MKN，故 $MN//$ 平面 CBB_1C_1，

（2）因为侧面 CBB_1C_1 为正方形，故 $CB\perp BB_1$，

而 $CB\subset$ 平面 CBB_1C_1，平面 $CBB_1C_1\perp$ 平面 ABB_1A_1，

平面 $CBB_1C_1\cap$ 平面 $ABB_1A_1=BB_1$，故 $CB\perp$ 平面 ABB_1A_1，

因为 $NK//BC$，故 $NK\perp$ 平面 ABB_1A_1，

因为 $AB\subset$ 平面 ABB_1A_1，故 $NK\perp AB$，

若选①，则 $AB\perp MN$，而 $NK\perp AB$，$NK\bigcap MN=N$，

故 $AB\perp$ 平面 MNK，而 $MK\subset$ 平面 MNK，故 $AB\perp MK$，

所以 $AB\perp BB_1$，而 $CB\perp BB_1$，$CB\cap AB=B$，故 $BB_1\perp$ 平面 ABC，

故可建立如所示的空间直角坐标系，则 $B(0,0,0), A(0,2,0), N(1,1,0), M(0,1,2)$，

故 $\overrightarrow{BA}=(0,2,0), \overrightarrow{BN}=(1,1,0), \overrightarrow{BM}=(0,1,2)$，

设平面 BNM 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BN}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BM}=0\end{cases}$，从而 $\begin{cases}x+y=0\\ y+2z=0\end{cases}$，取 $z=-1$，则 $\vec{n}=(-2,2,-1)$，

设直线 AB 与平面 BNM 所成的角为 θ，则

$$\sin\theta=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{AB}\right\rangle\right|=\frac{4}{2\times3}=\frac{2}{3}.$$

若选②，因 $NK//BC$，故 $NK\perp$ 平面 ABB_1A_1，而 $KM\subset$ 平面 MKN，

故 $NK\perp KM$，而 $B_1M=BK=1, NK=1$，故 $B_1M=NK$，

而 $B_1B = MK = 2$， $MB = MN$， 故$\triangle BB_1M \cong \triangle MKN$，

所以 $\angle BB_1M = \angle MKN = 90^\circ$， 故 $A_1B_1 \perp BB_1$，

而 $CB \perp BB_1$， $CB \cap AB = B$， 故 $BB_1 \perp$ 平面 ABC，

故可建立如所示的空间直角坐标系，则 $B(0,0,0), A(0,2,0), N(1,1,0), M(0,1,2)$，

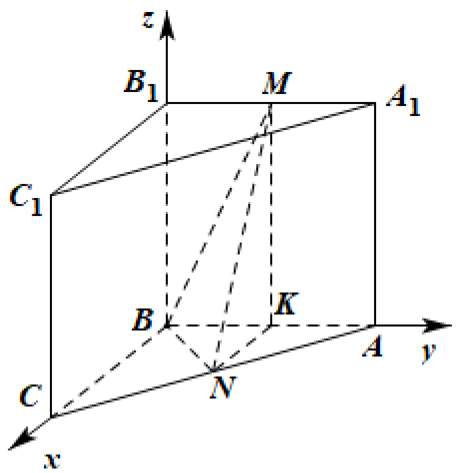
故 $\overrightarrow{BA} = (0,2,0), \overrightarrow{BN} = (1,1,0), \overrightarrow{BM} = (0,1,2)$，

设平面 BNM 的法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$，

则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BN} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \end{cases}$， 从而 $\begin{cases} x + y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$， 取 $z = -1$， 则 $\vec{n} = (-2,2,-1)$，

设直线 AB 与平面 BNM 所成的角为 θ， 则

$\sin\theta = \left|\cos\left\langle \vec{n}, \overrightarrow{AB} \right\rangle\right| = \dfrac{4}{2\times 3} = \dfrac{2}{3}$.



18.（1）0.4　　（2）$\dfrac{7}{5}$

（3）丙

19.（1） $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$

（2） $k = -4$

20.（1） $y = x$

（2） $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.

（3）解：原不等式等价于 $f(s+t) - f(s) > f(t) - f(0)$，

令 $m(x)=f(x+t)-f(x)$，$(x,t>0)$，

即证 $m(x)>m(0)$，

$\because m(x)=f(x+t)-f(x)=\mathrm{e}^{x+t}\ln(1+x+t)-\mathrm{e}^{x}\ln(1+x)$，

$$m'(x)=\mathrm{e}^{x+t}\ln(1+x+t)+\frac{\mathrm{e}^{x+t}}{1+x+t}-\mathrm{e}^{x}\ln(1+x)-\frac{\mathrm{e}^{x}}{1+x}=g(x+t)-g(x),$$

由（2）知 $g(x)=f'(x)=\mathrm{e}^{x}(\ln(1+x)+\dfrac{1}{1+x})$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore g(x+t)>g(x)$，

$\therefore m'(x)>0$

$\therefore m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又因为 $x,t>0$，

$\therefore m(x)>m(0)$，所以命题得证.

21.（1）是 $5-$ 连续可表数列；不是 $6-$ 连续可表数列.

（2）若 $k\le 3$,设为 $Q:a,b,c$,则至多 $a+b,b+c,a+b+c,a,b,c$，6 个数字，没有 8 个，矛盾；

当 $k=4$ 时,数列 $Q:1,4,1,2$，满足 $a_1=1$，$a_4=2$，$a_3+a_4=3$，$a_2=4$，$a_1+a_2=5$，$a_1+a_2+a_3=6$，$a_2+a_3+a_4=7$，$a_1+a_2+a_3+a_4=8$，$\therefore k_{\min}=4$.

（3）$Q:a_1,a_2,\cdots,a_k$，若 $i=j$ 最多有 k 种，若 $i\ne j$，最多有 C_k^2 种，所以最多有 $k+\mathrm{C}_k^2=\dfrac{k(k+1)}{2}$ 种，

若 $k\le 5$，则 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 至多可表 $\dfrac{5(5+1)}{2}=15$ 个数，矛盾，

从而若 $k<7$,则 $k=6$，a,b,c,d,e,f 至多可表 $\dfrac{6(6+1)}{2}=21$ 个数，

而 $a+b+c+d+e+f<20$，所以其中有负的，从而 a,b,c,d,e,f 可表 1~20 及那个负数（恰 21 个），这表明 $a\sim f$ 中仅一个负的，没有 0，且这个负的在 $a\sim f$ 中绝对值最小，同时 $a\sim f$ 中没有两数相同,设那个负数为 $-m(m\ge 1)$，

则所有数之和 $\ge m+1+m+2+\cdots+m+5-m=4m+15$，$4m+15\le 19\Rightarrow m=1$，

$\therefore\{a,b,c,d,e,f\}=\{-1,2,3,4,5,6\}$，再考虑排序，排序中不能有和相同，否则不足 20 个，

$\because 1=-1+2$ （仅一种方式），

$\therefore -1$ 与 2 相邻，

若 -1 不在两端,则"$\underline{x}$, -1, 2, __,__,__"形式,

若 $x=6$，则 $5=6+(-1)$（有 2 种结果相同，方式矛盾），

$\therefore x\neq 6$， 同理 $x\neq 5,4,3$ ，故 -1 在一端，不妨为"$\underline{-1}, 2, \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$"形式，

若 $A=3$,则 $5=2+3$ （有 2 种结果相同，矛盾）， $A=4$ 同理不行，

$A=5$，则 $6=-1+2+5$ （有 2 种结果相同，矛盾），从而 $A=6$，

由于 $7=-1+2+6$,由表法唯一知 3,4 不相邻,、

故只能 $-1,2,6,3,5,4$，①或 $-1,2,6,4,5,3$，②

这 2 种情形，

对①：$9=6+3=5+4$，矛盾，

对②：$8=2+6=5+3$，也矛盾，综上 $k\neq 6$

$\therefore k\geq 7$.