2021年北京卷高考真题数学试卷-学生用卷

一、选择题（共10小题，每小题4分，共40分．在每小题列出的的四个选项中，选出符合题目要求的一项．）

1、已知集合$A=\{x|-1<x<1\}$，$B=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，则$A\cup B=$（　　）．

A. $\{x|0\leqslant x<1\}$

B. $\{x|-1<x\leqslant 2\}$

C. $\{x|1<x\leqslant 2\}$

D. $\{x|0<x<1\}$

2、在复平面内，复数z满足$(1-\mathrm{i})\cdot z=2$，则$z=$（　　）．

A. $2+\mathrm{i}$　　B. $2-\mathrm{i}$　　C. $1-\mathrm{i}$　　D. $1+\mathrm{i}$

3、设函数$f(x)$的定义域为$[0,1]$，则“函数$f(x)$在$[0,1]$上单调递增”是“函数$f(x)$在$[0,1]$上的最大值为$f(1)$”的（　　）．

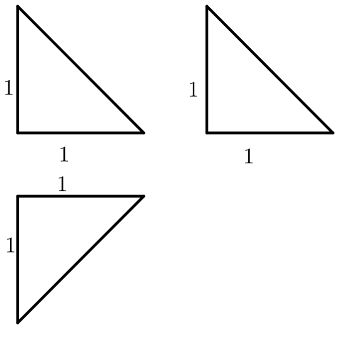
A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

4、某四面体的三视图如图所示，该四面体的表面积为（　　）



A. $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

B. 4

C. $3+\sqrt{3}$

D. 2

5、双曲线C:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$过点$(\sqrt{2},\sqrt{3})$，离心率为 2，则双曲线的标准方程为（　　）.

A. $\frac{x^2}{3}-y^2=1$

B. $x^2-\frac{y^2}{3}=1$

C. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1$

D. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$

6、《中国共产党党旗党徽制作和使用的若干规定》指出，中国共产党党旗为旗面缀有金黄色党徽图案的红旗，通用规格有五种．这五种规格党旗的长a_1，a_2，a_3，a_4，a_5（单位：cm）成等差数列，对应的宽为b_1，b_2，b_3，b_4，b_5（单位：cm），且长与宽之比都相等．已知$a_1=288$，$a_5=96$，$b_1=192$，则$b_3=$（　　）.

A. 64　　B. 96　　C. 128　　D. 160

7、已知函数$f(x)=\cos x-\cos 2x$，试判断该函数的奇偶性及最大值（　　）.

A. 奇函数，最大值为 2

B. 偶函数，最大值为 2

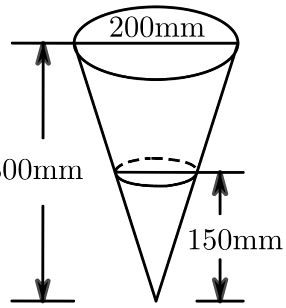
C. 奇函数，最大值为$\frac{9}{8}$

D. 偶函数，最大值为$\frac{9}{8}$

8、某一时段内，从天空降落到地面上的雨水，未经蒸发、渗透、流失而在水平面上积聚的深度，称为这个时段的降雨量（单位：mm）．24h 降雨量的等级划分如下：

等级	24h降雨量（精确到0.1）
……	……
小雨	$0.1\sim9.9$
中雨	$10.0\sim24.9$
大雨	$25.0\sim49.9$
暴雨	$50.0\sim99.9$
……	……

在综合实践活动中，某小组自制了一个底面直径为 200mm，高为 300mm 的圆锥形雨量器，若一次降雨过程中，该雨量器收集的 24h 的雨水高度是 150mm（如图所示），则这 24h 降雨量的等级是（　　）.



A. 小雨

B. 中雨

C. 大雨

D. 暴雨

9、已知直线 $y=kx+m$（m 为常数）与圆$x^2+y^2=4$ 交于点 M，N．当 k 变化时，若$|MN|$的最小值为 2，则 $m=$（　　）.

A. ±1　　B. $\pm\sqrt{2}$　　C. $\pm\sqrt{3}$　　D. ±2

10、数列$\{a_n\}$是递增的整数数列，且$a_1\geqslant3$，$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n<100$，则 n 的最大值为（　　）.

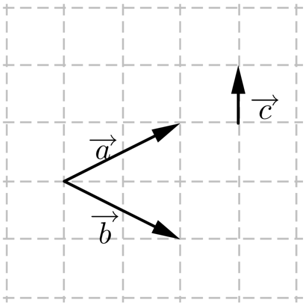
A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. 12

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．）

11、$\left(x^3-\frac{1}{x}\right)^4$的展开式中常数项是 ____________________ .

12、已知抛物线 C：$y^2=4x$，C 的焦点为 F，点 M 在 C 上，且$|FM|=6$，则点 M 的横坐标是 ____________________ ；作 $MN\perp x$ 轴于点 N，则$S_{\triangle FMN}=$ ____________________ .

13、已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$在正方形网格中的位置如图所示．若网格纸上小正方形的边长为 1，则$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=$ ____________________ ；$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ ____________________ .



14、若点 $P(\cos\theta,\sin\theta)$与点 $Q\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right),\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right)$关于 y 轴对称，写出一个符合题意的θ值为 ____________________ .

15、已知 $f(x)=|\lg x|-kx-2$，给出下列四个结论：

①若 $k=0$，则 $f(x)$有两个零点；

②$\exists k<0$，使得 $f(x)$有一个零点；

③$\exists k<0$，使得 $f(x)$有三个零点；

④$\exists k>0$，使得 $f(x)$有三个零点.

以上正确结论的序号是 ____________________ .

三、解答题（共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．）

16、已知在$\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 所对的边分别是 a，b，c，$c=2b\cos B$，$C=\frac{2\pi}{3}$.

(1) 求角 B 的大小.

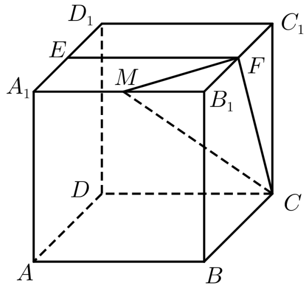
(2) 在三个条件中选择一个作为已知条件，使$\triangle ABC$ 存在且唯一确定，并求 BC 边上的中线的长度.

① $c=\sqrt{2}b$.

② 周长为 $4+2\sqrt{3}$.

③ 面积为$S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

17、已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，点 E 为A_1D_1中点，直线B_1C_1交平面 CDE 于点 F.



(1) 求证：点 F 为B_1C_1中点；

(2) 若点 M 为棱A_1B_1上一点，且二面角 $M-CF-E$ 的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{3}$，求$\frac{A_1M}{A_1B_1}$.

18、在核酸检测中，“k 合 1”混采核酸检测是指：先将 k 个人的样本混合在一起进行 1 次检测，如果这 k 个人都没有感染新冠病毒，则检测结果为阴性，得到每人的检测结果都为阴性，检测结束；如果这 k 个人中有人感染新冠病毒，则检测结果为阳性，此时需对每人再进行 1 次检测，得到每人的检测结果，检测结束.

现对 100 人进行核酸检测，假设其中只有 2 人感染新冠病毒，并假设每次检测结果准确.

(1) 将这 100 人随机分成 10 组，每组 10 人，且对每组都采用“10 合 1”混采核酸检测.

①如果感染新冠病毒的 2 人在同一组，求检测的总次数.

②已知感染新冠病毒的 2 人分在同一组的概率为$\frac{1}{11}$. 设 X 是检测的总次数，求 X 的分布列与数学期望 $E(X)$.

(2) 将这 100 人随机分成 20 组，每组 5 人，且对每组都采用“5 合 1”混采核酸检测. 设 Y 是检测的总次数，试判断数学期望 $E(Y)$与（1）中 $E(X)$的大小.（结论不要求证明）

19、已知函数 $f(x)=\frac{3-2x}{x^2+a}$.

(1) 若 $a=0$，求 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

(2) 若函数 $f(x)$在 $x=-1$ 处取得极值，求 $f(x)$的单调区间，以及最大值和最小值.

20、已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点 $A(0,-2)$，以四个顶点围成的四边形面积为 $4\sqrt{5}$.

(1) 求椭圆 E 的标准方程；

(2) 过点 $P(0,-3)$的直线 l 斜率为 k，交椭圆 E 于不同的两点 B，C，直线 AB、AC 交 $y=-3$ 于点 M、N，若$|PM|+|PN|\leqslant 15$，求 k 的取值范围.

21、定义R_p数列$\{a_n\}$：对 $p\in\mathbf{R}$，满足：

①$a_1+p\geqslant 0$，$a_2+p=0$；②$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_{4n-1}<a_{4n}$；③$\forall m,n\in\mathbf{N}^*$，$a_{m+n}\in\{a_m+a_n+p,a_m+a_n+p+1\}$.

(1) 对前 4 项 2，-2，0，1 的数列，可以是R_2数列吗？说明理由；

(2) 若$\{a_n\}$是R_0数列，求 a_5的值；

(3) 若S_n是数列$\{a_n\}$的前 n 项和，是否存在 $p\in\mathbf{R}$，使得存在R_p数列$\{a_n\}$，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，满足$S_n\geqslant S_{10}$？若存在，求出所有这样的 p；若不存在，说明理由.

1 、【答案】 B;

【解析】 ∵集合 $A=\{x|-1<x<1\}$，$B=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，

∴$A\cup B=\{x|-1<x<1\}\cup\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}=\{x|-1<x\leqslant 2\}$.

故选 B.

2 、【答案】 D;

【解析】 因为$(1-\mathrm{i})\cdot z=2$，

所以 $z=\frac{2}{1-\mathrm{i}}=\frac{2(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=1+\mathrm{i}$.

故选 D.

3 、【答案】 A;

【解析】 若函数 $f(x)$在$[0,1]$上单调递增，

则函数 $f(x)$在$[0,1]$上的最大值为 $f(1)$，

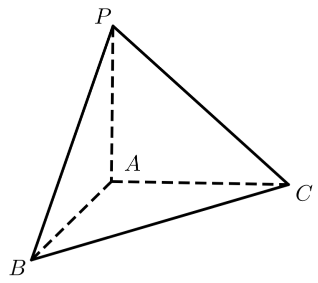
若 $f(x)=\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$，则函数 $f(x)$在$[0,1]$上的最大值为 $f(1)$，

但函数 $f(x)$在$[0,1]$上不单调.

故选 A.

4 、【答案】 A;

【解析】 由三视图还原原几何体如图，



$PA\perp$底面 ABC，$AB\perp AC$，$PA=AB=AC=1$，

则△ PBC 是边长为$\sqrt{2}$的等边三角形，

则该四面体的表面积为 $S=3\times\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

故选 A.

5 、【答案】 B;

【解析】 因为双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 过点$(\sqrt{2},\sqrt{3})$，

则有$\frac{2}{a^2}-\frac{3}{b^2}=1$①，

又因为离心率为 2，

则 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=2$②，

由①②可得，$a^2=1$，$b^2=3$，

所以双曲线 C 的标准方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

故选 B.

6 、【答案】 C;

【解析】 由题意知，$a_3=\frac{a_1+a_5}{2}=192$.

$\because\frac{a_3}{b_3}=\frac{a_1}{b_1}$，即$\frac{192}{b_3}=\frac{288}{192}$，

解得：$b_3=128$.

故选 C.

7 、【答案】 D;

【解析】 因为 $f(x)=\cos x-\cos 2x=\cos x-(2\cos^2x-1)=-2\cos^2x+\cos x+1$，

$f(-x)=-2\cos^2(-x)+\cos(-x)+1=-2\cos^2x+\cos x+1=f(x)$，

故函数 $f(x)$为偶函数.

令 $t=\cos x$，则 $t\in[-1,1]$，

故 $f(t)=-2t^2+t+1$ 是开口向下的二次函数，

所以当 $t=-\frac{1}{2\times(-2)}=\frac{1}{4}$时，$f(t)$取得最大值 $f\left(\frac{1}{4}\right)=-2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}+1=\frac{9}{8}$，

故函数的最大值为$\frac{9}{8}$.

综上所述，函数 $f(x)$是偶函数，有最大值$\frac{9}{8}$.

故选 D.

8 、【答案】 B;

【解析】 圆锥的体积为 $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\pi r^2h$，

因为圆锥内积水的高度是圆锥总高度的一半，

所以圆锥内积水部分的半径为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times200=50(\mathrm{mm})$，

将 $r=50$，$h=150$ 代入公式可得 $V=125000\pi(\mathrm{mm}^3)$，

题中定义的是平地上积水的厚度，即平地上积水的高，

平地上积水的体积为 $V=Sh$，且对于这一块平地的面积，即为圆锥底面圆的面积，

所以 $S=\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\times200\right)^2=10000\pi(\mathrm{mm}^2)$，

则平地上积水的厚度 $h=\frac{125000\pi}{10000\pi}=12.5(\mathrm{mm})$，

因为 $10<12.5<25$，

由题意可知，这一天的雨水属于中雨.

故选 B.

9 、【答案】 C;

【解析】 圆 C：$x^2+y^2=4$，直线 l：$y=kx+m$，

直线被圆 C 所截的弦长的最小值为 2，设弦长为 a，

则圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\sqrt{4-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{4-\frac{a^2}{4}}$,

当弦长取得最小值 2 时，则 d 有最大值 $\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$,

又 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$，因为 $k^2\geqslant 0$，则 $\sqrt{1+k^2}\geqslant 1$,

故 d 的最大值为$|m|=\sqrt{3}$，解得 $m=\pm\sqrt{3}$.

故选 C.

10 、【答案】 C;

【解析】 ∵数列$\{a_n\}$是递增的整数数列，

∴n 要取最大，递增幅度为尽可能小的整数，

假设递增的幅度为 1，

∵$a_1=3$,

∴$a_n=n+2$,

则$S_n=\frac{(3+n+2)n}{2}=\frac{5n+n^2}{2}$,

当 $n=10$ 时，$a_{10}=12$，$S_{10}=75$,

∵$100-S_{10}=25>a_{10}=12$，∴n 可继续增大，$n=10$ 不是最大值.

当 $n=12$ 时，$a_{12}=14$，$S_{12}=102>100$，不满足题意，

即 $n=11$ 为最大值.

故选 C.

11 、【答案】 -4;

【解析】 设$\left(x^3-\frac{1}{x}\right)^4$展开式的通项为$T_{r+1}$，则$T_{r+1}=\mathrm{C}_4^r\cdot(x^3)^{4-r}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^r=(-1)^r\cdot\mathrm{C}_4^r\cdot x^{12-4r}$

令 $12-4r=0$ 得 $r=3$.

∴展开式中常数项为：$(-1)^3\times\mathrm{C}_4^3=-4$.

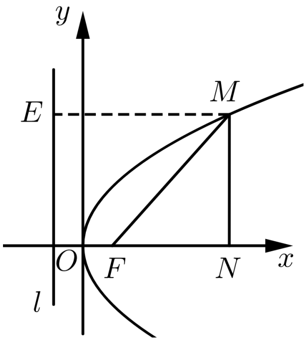
故答案为：-4.

12 、【答案】 5;$4\sqrt{5}$;

【解析】 抛物线 C：$y^2=4x$,

则焦点 $F(1,0)$，准线 l 的方程为 $x=-1$,

如图，过点 M 作 $ME \perp l$，垂足为点 E，设 $M(x_0,y_0)$，



则$|ME| = |MF| = 6$，

所以$x_0 + 1 = 6$，则$x_0 = 5$，

所以点 M 的横坐标为 5；

因为点 M 在抛物线上，故$y_0^2 = 4 \times 5 = 20$，

所以$|y_0| = 2\sqrt{5}$，即$|MN| = 2\sqrt{5}$，

所以$S_{\triangle FMN} = \frac{1}{2} \cdot |FN| \cdot |MN| = \frac{1}{2} \times (5-1) \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$.

故答案为：5；$4\sqrt{5}$.

13 、【答案】 0;3;

【解析】 $\because \vec{a} = (2,1)$，$\vec{b} = (2,-1)$，$\vec{c} = (0,1)$，

$\therefore (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = (4,0) \cdot (0,1) = 4 \times 0 + 0 \times 1 = 0$，

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 2 + 1 \times (-1) = 3 \cdot$

故答案为：0；3．

14 、【答案】 $\frac{5\pi}{12}$（答案不唯一）

;

【解析】 因为点 $P(\cos\theta,\sin\theta)$与点 $Q\left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right),\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)\right)$关于 y 轴对称，

故其横坐标成相反数，纵坐标相等，

即 $\sin\theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$且 $\cos\theta = -\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$，

因为 $\sin\theta = \sin(\pi - \theta)$，$\cos\theta = -\cos(\pi - \theta)$，

所以$\theta + \frac{\pi}{6} = \pi - \theta$，解得$\theta = \frac{5\pi}{12}$,

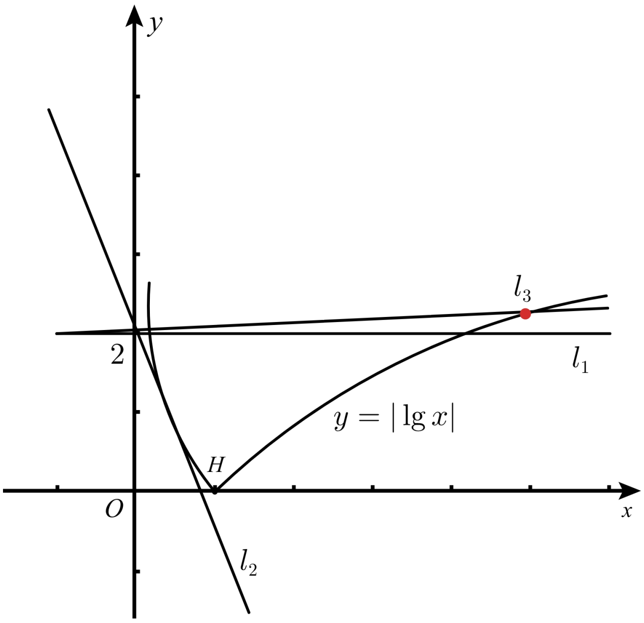
则符合题意的θ值可以为$\frac{5\pi}{12}$.

故答案为：$\frac{5\pi}{12}$（答案不唯一）.

15 、【答案】 ①②④;

【解析】 函数 $f(x)=|\lg x|-kx-2$ 的零点的个数可转化为函数 $y=|\lg x|$的图象与直线 $y=kx+2$ 的交点的个数；

作函数 $y=|\lg x|$的图象与直线 $y=kx+2$，如图，



若 $k=0$，则函数 $y=|\lg x|$的图象与 $y=kx+2$ 在$(0,1)$与$(1,+\infty)$上各有一个交点，如直线l_1，则 $f(x)$有两个零点，故①正确；

若 $k<0$，则当函数 $y=|\lg x|$的图象与 $y=kx+2$ 相切时，$f(x)$有一个零点，如直线l_2，故②正确；

当 $k<0$ 时，函数 $y=|\lg x|$的图象与 $y=kx+2$ 至多有两个交点，故③不正确；

当 $k>0$ 且 k 足够小时，函数 $y=|\lg x|$的图象与 $y=kx+2$ 在$(0,1)$与$(1,+\infty)$上分别有 1 个、2 个交点，如直线l_3，故④正确.

故答案为：①②④.

16 、【答案】 (1) $\frac{\pi}{6}$.

;

(2)

① 不存在.

② $\sqrt{7}$.

③ $\frac{\sqrt{21}}{2}$.

;

【解析】 (1) $\because c=2b\cos B$，

$\therefore$由正弦定理可得 $\sin C=2\sin B\cos B$，即 $\sin C=\sin 2B$，

$\because C=\frac{2\pi}{3}$,

$\therefore$当 $C=2B$ 时，$B=\frac{\pi}{3}$，即 $C+B=\pi$ ，不符合题意，舍去，

$\therefore C+2B=\pi$，

$\therefore 2B=\frac{\pi}{3}$,

即 $B=\frac{\pi}{6}$.

(2)

① $c=\sqrt{2}b$，

由正弦定理可得

$\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$，与已知条件 $c=\sqrt{2}b$ 矛盾，故△ ABC 不存在.

② 周长为 $4+2\sqrt{3}$，

$\because C=\frac{2\pi}{3}$，$B=\frac{\pi}{6}$,

$\therefore A=\frac{\pi}{6}$,

由正弦定理可得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$（$R$ 为△ ABC 外接圆的半径），即$\frac{a}{\frac{1}{2}}=\frac{b}{\frac{1}{2}}=\frac{c}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R$,

$\therefore a=R$，$b=R$，$c=\sqrt{3}R$，

$\therefore a+b+c=(2+\sqrt{3})R=4+2\sqrt{3}$，

$\therefore R=2$，即 $a=2$，$b=2$，$c=2\sqrt{3}$，

$\because$△ ABC 存在且唯一确定，

设 BC 的中点为 D，

$\therefore CD=1$，

在△ ACD 中，由余弦定理得$AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cdot\cos C$，

即$AD^2=4+1-2\times 2\times 1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=7$，$\therefore AD=\sqrt{7}$，

$\therefore BC$ 边上的中线的长度为$\sqrt{7}$.

③ 面积为$S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$,

$\because A=B=\frac{\pi}{6}$,

$\therefore a=b$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，解得 $a=\sqrt{3}$，

由余弦定理可得

$$AD^2=AC^2+CD^2-2\cdot AC\cdot CD\cdot\cos\frac{2\pi}{3}=3+\frac{3}{4}+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{21}{4},$$

即 $AD=\frac{\sqrt{21}}{2}$.

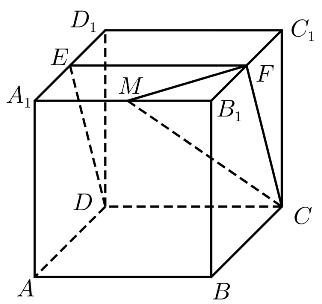
17 、【答案】 (1) 证明见解析.

;

(2) $\frac{1}{2}$.

;

【解析】 (1) 连接 DE，



在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$CD//C_1D_1$，$C_1D_1\subset$平面$A_1B_1C_1D_1$，$CD\not\subset$平面$A_1B_1C_1D_1$，

则 $CD//$平面$A_1B_1C_1D_1$，因为平面$A_1B_1C_1D_1\cap$平面 $CDEF=EF$，

所以 $CD//EF$，则 $EF//C_1D_1$，

故$A_1B_1//EF//C_1D_1$，又因为$A_1D_1//B_1C_1$，

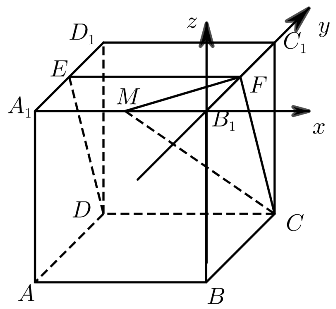
所以四边形A_1B_1FE 为平行四边形，四边形 EFC_1D_1为平行四边形，

所以$A_1E=B_1F$，$ED_1=FC_1$，

而点 E 为A_1D_1的中点，所以$A_1E=ED_1$，

故$B_1F=FC_1$，则点 F 为B_1C_1的中点.

(2) 以点B_1为原点，建立空间直角坐标系，如图所示，



设正方体边长为 2，设点 $M(m,0,0)$，且 $m<0$，

则 $C(0,2,-2)$，$E(-2,1,0)$，$F(0,1,0)$，

故$\overrightarrow{FE}=(-2,0,0)$，$\overrightarrow{FC}=(0,1,-2)$，$\overrightarrow{FM}=(m,-1,0)$

设平面 CMF 的法向量为$\overrightarrow{m}=(a,b,1)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{FM}=0\\\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{FC}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}ma-b=0\\b-2=0\end{cases}$，

所以 $a=\frac{2}{m}$，$b=2$，故$\overrightarrow{m}=\left(\frac{2}{m},2,1\right)$，

设平面 $CDEF$ 的法向量为$\overrightarrow{n}=(x,y,1)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{FE}=0\\\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{FC}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-2x=0\\y-2=0\end{cases}$

所以 $x=0$，$y=2$，故$\overrightarrow{n}=(0,2,1)$，

因为二面角 $M-CF-E$ 的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{3}$，

则$|\cos\langle\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{m}||\overrightarrow{n}|}=\frac{5}{\sqrt{\frac{4}{m^2}+4+1}\times\sqrt{2^2+1}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，

解得 $m=\pm1$，又因为 $m<0$，

所以 $m=-1$，

故$\frac{A_1M}{A_1B_1}=\frac{1}{2}$.

18 、【答案】 (1) 20 次；$\frac{320}{11}$.

;

(2) $E(X)<E(Y)$.

;

【解析】 (1) ①若采用“10 合 1 检测法”，每组检测一次，共 10 次；

且两名患者在同一组，需要再检测 10 次，

因此一共需要检测 20 次.

②由题意可得：X 的可能取值为 20，30.

$P(X=20)=\frac{1}{11}$，$P(X=30)=\frac{10}{11}$.

可得分布列：

X	20	30
P	$\frac{1}{11}$	$\frac{10}{11}$

$E(X)=20\times\frac{1}{11}+30\times\frac{10}{11}=\frac{320}{11}$.

(2) 由题意可得：Y 的可能取值为 25，30.

$P(Y=25)=20\times\frac{C_2^2C_{98}^3}{C_{100}^5}=\frac{4}{99}$，$P(Y=30)=\frac{95}{99}$.

可得分布列：

Y	25	30
P	$\frac{4}{99}$	$\frac{95}{99}$

$E(Y)=25\times\frac{4}{99}+30\times\frac{95}{99}=\frac{2950}{99}>\frac{2880}{99}=\frac{320}{11}$.

$E(X)<E(Y)$.

19 、【答案】 (1) $y=-4x+5$

;

(2) 见解析

;

【解析】 (1) 因为 $f(x)=\frac{3-2x}{x^2}$的导数为$f'(x)=\frac{-2x^2-2x(3-2x)}{x^4}=\frac{2x-6}{x^3}$，$f(1)=1$，

所以 $y=f(x)$在点$(1,1)$处的切线的斜率为-4，

则 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为 $y-1=-4(x-1)$，

即 $y=-4x+5$.

(2) $f(x)=\frac{3-2x}{x^2+a}$的导数为$f'(x)=\frac{-2(x^2+a)-2x(3-2x)}{(x^2+a)^2}$,

由题意可得$f'(-1)=0$，即$\frac{8-2a}{(a+1)^2}=0$，解得 $a=4$，

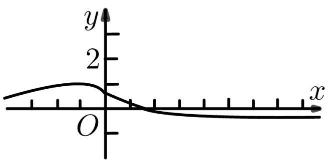
可得 $f(x)=\frac{3-2x}{x^2+4}$,

$f'(x)=\frac{2(x+1)(x-4)}{(x^2+4)^2}$,

当 $x>4$ 或 $x<-1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

当$-1<x<4$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减.

函数 $y=f(x)$的图象如图，



当 $x\to-\infty$，$y\to0$；$x\to+\infty$，$y\to0$，

则 $f(x)$在 $x=-1$ 处取得极大值 1，且为最大值 1；在 $x=4$ 处取得极小值$-\frac{1}{4}$，且为最小值$-\frac{1}{4}$.

所以 $f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,-1)$，$(4,+\infty)$，单调递减区间为$(-1,4)$；

$f(x)$的最大值为 1，最小值为$-\frac{1}{4}$.

20 、【答案】 (1) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$.

;

(2) $[-3,-1)\cup(1,3]$.

;

【解析】 (1) 因为椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点 $A(0,-2)$，则 $b=2$，

又因为以四个顶点围成的四边形面积为 $4\sqrt{5}$，

所以$\frac{1}{2}\times2a\times2b=4\sqrt{5}$，解得 $a=\sqrt{5}$，

故椭圆 E 的标准方程为$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2) 由题意，设直线 l 的方程为 $y-(-3)=k(x-0)$，即 $y=kx-3$，

当 $k=0$ 时，直线 l 与椭圆 E 没有交点，而直线 l 交椭圆 E 于不同的两点 B，C，

所以 $k\neq 0$，

设 $B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，

联立方程组$\begin{cases}y=kx-3\\ \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$，可得$(4+5k^2)x^2-30kx+25=0$，

则$\Delta=(-30k)^2-4\times 25(4+5k^2)>0$，解得$|k|>1$，

所以$x_1+x_2=\frac{30k}{4+5k^2}$，$x_1x_2=\frac{25}{4+5k^2}$，

则$y_1y_2=(kx_1-3)(kx_2-3)=k^2x_1x_2-3k(x_1+x_2)+9=\frac{-20k^2+36}{4+5k^2}$，

$y_1+y_2=(kx_1-3)+(kx_2-3)=k(x_1+x_2)-6=\frac{-24}{4+5k^2}$，

直线 AB 的方程为 $y-(-2)=\frac{y_1-(-2)}{x_1-0}(x-0)$，即 $y=\frac{y_1+2}{x_1}x-2$，

直线 AC 的方程为 $y-(-2)=\frac{y_2-(-2)}{x_2-0}(x-0)$，即 $y=\frac{y_2+2}{x_2}x-2$，

因为直线 AB 交 $y=-3$ 于点 M，

所以令 $y=-3$，则$x_M=\frac{-x_1}{y_1+2}$，

故 $M\left(\frac{-x_1}{y_1+2},-3\right)$，

同理可得 $N\left(\frac{-x_2}{y_2+2},-3\right)$，

注意到$x_1x_2=\frac{25}{4+5k^2}>0$，所以$x_1$，$x_2$同号，

因为$y_1+2>0$，$y_2+2>0$，所以x_M，x_N同号，

故$|PM|+|PN|=|x_M|+|x_N|$，

则$|PM|+|PN|=\left|\frac{x_1}{y_1+2}+\frac{x_2}{y_2+2}\right|=\left|\frac{x_1(y_2+2)+x_2(y_1+2)}{(y_1+2)(y_2+2)}\right|$

$=\left|\frac{x_1(kx_2-3)+x_2(kx_1-3)+2(x_1+x_2)}{y_1y_2+2(y_1+y_2)+4}\right|$

$=\left|\frac{2kx_1x_2-(x_1+x_2)}{y_1y_2+2(y_1+y_2)+4}\right|$

$=\left|\frac{2k\cdot\frac{25}{4+5k^2}-\frac{30k}{4+5k^2}}{\frac{-20k^2+36}{4+5k^2}-\frac{48}{4+5k^2}+4}\right|$

$=5|k|$，

故$|PM|+|PN|=5|k|$，

又$|PM|+|PN|\leqslant 15$，即 $5|k|\leqslant 15$，即$|k|\leqslant 3$，又$|k|>1$，

所以 $1<|k|\leqslant 3$，

故 k 的取值范围为$[-3,-1)\cup(1,3]$.

21 、【答案】 (1) 不是，理由见解析

;

(2) 1

;

(3) 存在，$p=2$

;

【解析】 (1) 由性质③，结合题意可得 $0=a_3\in\{a_1+a_2+2,a_1+a_2+2+1\}=\{2,3\}$，矛盾，

故前 4 项 2，-2，0，1 的数列，不可能是R_2数列.

(2) 性质①，$a_1\geqslant 0$，$a_2=0$；

由性质③$a_{m+2}\in\{a_m,a_m+1\}$，因此$a_3=a_1$或$a_3=a_1+1$，$a_4=0$ 或$a_4=1$.

若$a_4=0$，由性质②可得$a_3<a_4$，即$a_1<0$ 或$a_1+1<0$，矛盾，

若$a_4=1$，$a_3=a_1+1$，由$a_3<a_4$，则$a_1+1<0$，矛盾

因此只能是$a_4=1$，$a_3=a_1$，

又因为$a_4=a_1+a_3$或$a_4=a_1+a_3+1$，所以$a_1=\frac{1}{2}$或$a_1=0$

若$a_1=\frac{1}{2}$，则$a_2\in\{a_1+a_1+0,a_1+a_1+0+1\}=\{2a_1,2a_1+1\}=\{1,2\}$，不满足$a_2=0$，舍去；

当$a_1=0$，则$\{a_n\}$的前四项为 0,0,0,1，

下面用数学归纳法证明$a_{4n+i}=n(i=1,2,3)$，$a_{4n+4}=n+1(n\in\mathbf{N}^*)$，

当 $n=0$ 时，经检验命题成立；

假设 $n\leqslant k(k\geqslant 0)$时命题成立.

当 $n=k+1$ 时，

若 $i=1$，则$a_{4(k+1)+1}=a_{4k+5}=a_{j+(4k+5-j)}$

利用性质③：$\{a_j+a_{4k+5-j}|j\in\mathbf{N}^*,1\leqslant j\leqslant 4k+4\}=\{k,k+1\}$，此时可得$a_{4k+5}=k+1$，

否则$a_{4k+5}=k$，取 $k=0$ 可得$a_5=0$，而由性质②可得$a_5=a_1+a_4\in\{1,2\}$，与$a_5=0$ 矛盾.

同理可得，$\{a_j+a_{4k+6-j}|j\in\mathbf{N}^*,1\leqslant j\leqslant 4k+5\}=\{k,k+1\}$，此时可得$a_{4k+6}=k+1$，

$\{a_j+a_{4k+8-j}|j\in\mathbf{N}^*,2\leqslant j\leqslant 4k+6\}=\{k+1,k+2\}$，此时可得$a_{4k+8}=k+2$，

$\{a_j+a_{4k+7-j}|j\in\mathbf{N}^*,1\leqslant j\leqslant 4k+6\}=\{k+1\}$，又因为$a_{4k+7}=k+1$，

即当 $n=k+1$ 时，命题成立.

综上可得，$a_5=a_{4\times1+1}=1$.

(3) 令$b_n=a_n+p$，由性质③可知，$\forall m,n\in\mathbf{N}^*$，$b_{m+n}=a_{m+n}+p\in\{a_m+p+a_n+p,a_m+p+a_n+p+1\}$

$=\{b_m+b_n,b_m+b_n+1\}$，

由于$b_1=a_1+p\geqslant0$，$b_2=a_2+p=0$，$b_{4n-1}=a_{4n-1}+p<a_{4n}+p=b_{4n}$

因此数列$\{b_n\}$为R_0数列，

由(2)可知，若$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_{4n+i}=n-p(i=1,2,3)$，$a_{4n+4}=n+1-p$；

$S_{11}-S_{10}=a_{11}=a_{4\times2+3}=2-p\geqslant0$，

$S_9-S_{10}=-a_{10}=-a_{4\times2+2}=-(2-p)\geqslant0$，

因此 $p=2$，此时a_1，a_2，$\cdots$，$a_{10}\leqslant0$，$a_j\geqslant0(j\geqslant11)$，满足题意.