**2021年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）数学**

**第一部分（选择题共40分）**

**一、选择题共10小题，每小题4分，共40分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．**

1. 已知集合，，则（ ）

A.  B. 

C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】结合题意利用并集的定义计算即可.

【详解】由题意可得：.

故选：B.

2. 在复平面内，复数满足，则（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】由题意利用复数的运算法则整理计算即可求得最终结果.

【详解】由题意可得：.

故选：D.

3. 已知是定义在上的函数，那么“函数在上单调递增”是“函数在上的最大值为”的（ ）

A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】利用两者之间的推出关系可判断两者之间的条件关系.

【详解】若函数在上单调递增，则在上的最大值为，

若在上的最大值为，

比如，

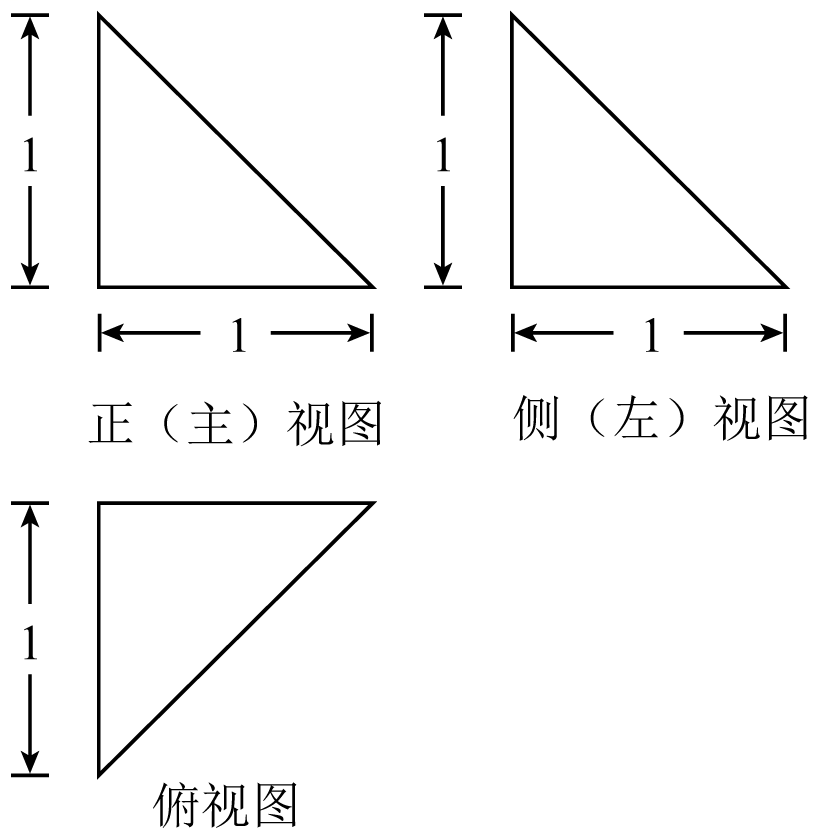
但在为减函数，在为增函数，

故在上的最大值为推不出在上单调递增，

故“函数在上单调递增”是“在上的最大值为”的充分不必要条件，

故选：A.

4. 某四面体的三视图如图所示，该四面体的表面积为（ ）



A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】根据三视图可得如图所示的几何体（三棱锥），根据三视图中的数据可计算该几何体的表面积.

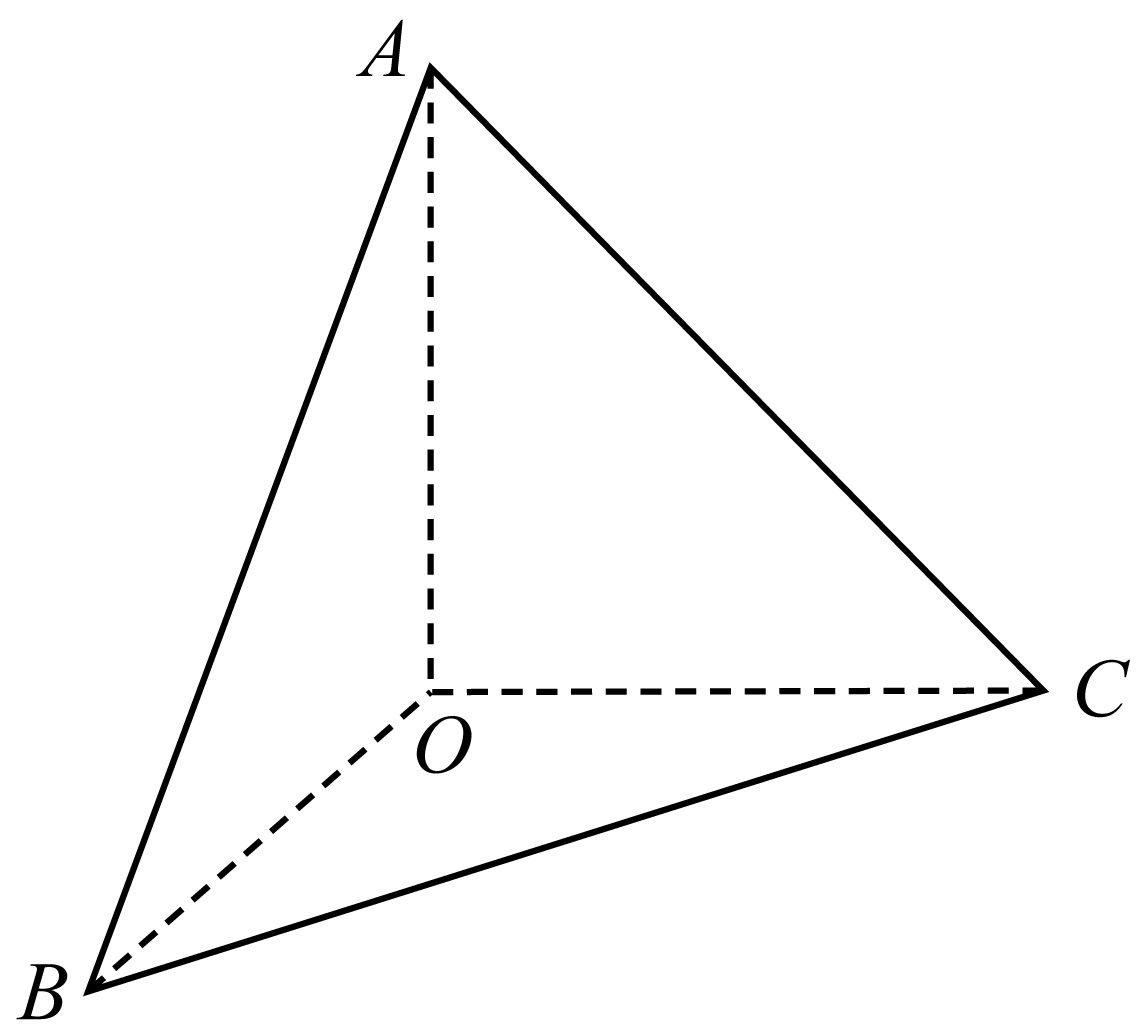
【详解】根据三视图可得如图所示的几何体-正三棱锥，

其侧面为等腰直角三角形，底面等边三角形，

由三视图可得该正三棱锥侧棱长为1，

故其表面积为，

故选：A.



5. 若双曲线离心率为，过点，则该双曲线的方程为（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】分析可得，再将点代入双曲线的方程，求出的值，即可得出双曲线的标准方程.

【详解】，则，，则双曲线的方程为，

将点的坐标代入双曲线的方程可得，解得，故，

因此，双曲线的方程为.

故选：B

6. 《中国共产党党旗党徽制作和使用的若干规定》指出，中国共产党党旗为旗面缀有金黄色党徽图案的红旗，通用规格有五种.这五种规格党旗的长(单位:cm)成等差数列，对应的宽为(单位: cm),且长与宽之比都相等，已知，，，则

A. 64 B. 96 C. 128 D. 160

【答案】C

【解析】

【分析】设等差数列公差为，求得，得到，结合党旗长与宽之比都相等和，列出方程，即可求解.

【详解】由题意，五种规格党旗的长(单位:cm)成等差数列，设公差为，

因为，，可得，

可得，

又由长与宽之比都相等，且，可得，所以.

故选：C.

7. 函数是

A. 奇函数，且最大值为2 B. 偶函数，且最大值为2

C. 奇函数，且最大值为 D. 偶函数，且最大值为

【答案】D

【解析】

【分析】由函数奇偶性的定义结合三角函数的性质可判断奇偶性；利用二倍角公式结合二次函数的性质可判断最大值.

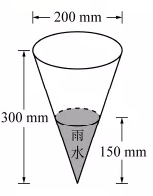
【详解】由题意，，所以该函数为偶函数，

又，

所以当时，取最大值.

故选：D.

8. 某一时间段内，从天空降落到地面上的雨水，未经蒸发、渗漏、流失而在水平面上积聚的深度，称为这个时段的降雨量（单位：）．24h降雨量的等级划分如下：



在综合实践活动中，某小组自制了一个底面直径为200 mm，高为300 mm的圆锥形雨量器.若一次降雨过程中，该雨量器收集的24h的雨水高度是150 mm（如图所示)，则这24h降雨量的等级是

A. 小雨 B. 中雨 C. 大雨 D. 暴雨

【答案】B

【解析】

【分析】计算出圆锥体积，除以圆面的面积即可得降雨量，即可得解.

【详解】由题意，一个半径为的圆面内的降雨充满一个底面半径为，高为的圆锥，

所以积水厚度，属于中雨.

故选：B.

9. 已知直线（为常数）与圆交于点，当变化时，若的最小值为2，则

A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】先求得圆心到直线距离，即可表示出弦长，根据弦长最小值得出

【详解】由题可得圆心为，半径为2，

则圆心到直线的距离，

则弦长为，

则当时，弦长取得最小值为，解得.

故选：C.

10. 已知是各项均为整数的递增数列，且，若，则的最大值为（ ）

A. 9 B. 10 C. 11 D. 12

【答案】C

【解析】

【分析】使数列首项、递增幅度均最小，结合等差数列的通项及求和公式求得可能的最大值，然后构造数列满足条件，即得到的最大值．

【详解】若要使*n*尽可能的大，则学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试卷、教案、课件、论文、素材以及各类教学资源下载，还有大量而丰富的教学相关资讯！，递增幅度要尽可能小，

不妨设数列学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试卷、教案、课件、论文、素材以及各类教学资源下载，还有大量而丰富的教学相关资讯！是首项为3，公差为1的等差数列，其前*n*项和为学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试卷、教案、课件、论文、素材以及各类教学资源下载，还有大量而丰富的教学相关资讯！，

则学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试卷、教案、课件、论文、素材以及各类教学资源下载，还有大量而丰富的教学相关资讯！，学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试卷、教案、课件、论文、素材以及各类教学资源下载，还有大量而丰富的教学相关资讯！，

所以.

对于学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试卷、教案、课件、论文、素材以及各类教学资源下载，还有大量而丰富的教学相关资讯！，学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试卷、教案、课件、论文、素材以及各类教学资源下载，还有大量而丰富的教学相关资讯！，

取数列学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试卷、教案、课件、论文、素材以及各类教学资源下载，还有大量而丰富的教学相关资讯！各项为学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试卷、教案、课件、论文、素材以及各类教学资源下载，还有大量而丰富的教学相关资讯！(，,

则**，**

所以*n*的最大值为11．

故选：C．

**第二部分（非选择题共110分）**

**二、填空题5小题，每小题5分，共25分．**

11. 在的展开式中，常数项为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】利用二项式定理求出通项公式并整理化简，然后令的指数为零，求解并计算得到答案.

【详解】学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试卷、教案、课件、论文、素材以及各类教学资源下载，还有大量而丰富的教学相关资讯！的展开式的通项学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试卷、教案、课件、论文、素材以及各类教学资源下载，还有大量而丰富的教学相关资讯！

令，解得学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试卷、教案、课件、论文、素材以及各类教学资源下载，还有大量而丰富的教学相关资讯！，

故常数项为学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试卷、教案、课件、论文、素材以及各类教学资源下载，还有大量而丰富的教学相关资讯！．

故答案为：.

12. 已知抛物线的焦点为，点在抛物线上，垂直轴与于点.若，则点的横坐标为\_\_\_\_\_\_\_； 的面积为\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】 ①. 5 ②. 

【解析】

【分析】根据焦半径公式可求的横坐标，求出纵坐标后可求.

【详解】因为抛物线的方程为，故且.

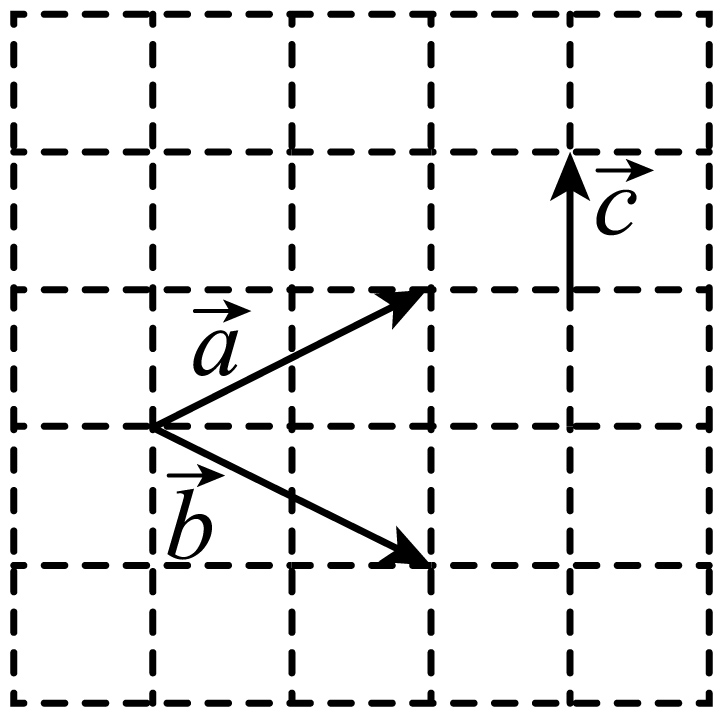
因为，，解得，故，

所以，

故答案为：5；.

13. 已知向量在正方形网格中的位置如图所示．若网格纸上小正方形的边长为1，则

 \_\_\_\_\_\_\_\_；\_\_\_\_\_\_\_\_.

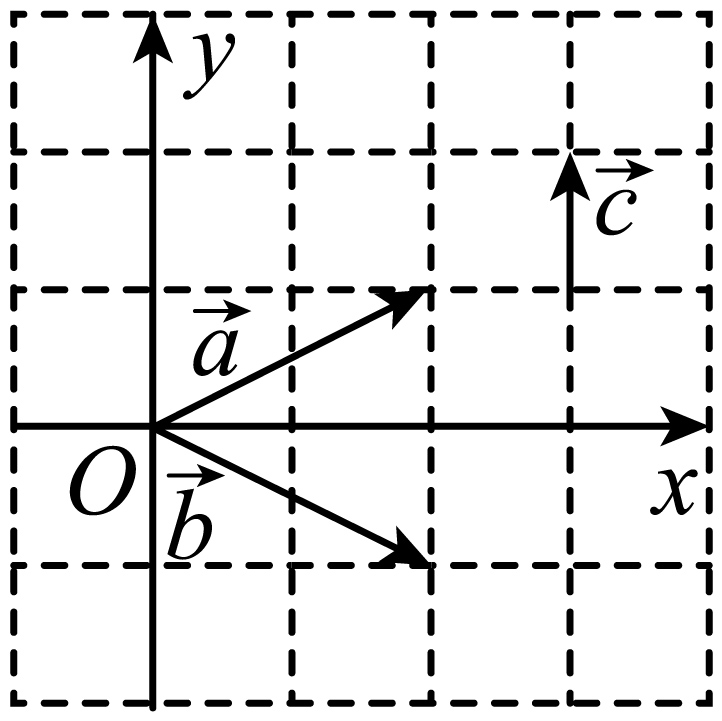


【答案】 ①. 0 ②. 3

【解析】

【分析】根据坐标求出，再根据数量积的坐标运算直接计算即可.

【详解】以交点为坐标原点，建立直角坐标系如图所示：



则，

，，

.

故答案为：0；3.

14. 若点关于轴对称点为，写出的一个取值为\_\_\_．

【答案】（满足即可）

【解析】

【分析】根据在单位圆上，可得关于轴对称，得出求解.

【详解】与关于轴对称，

即关于轴对称，

，

则，

当时，可取一个值为.

故答案为：（满足即可）.

15. 已知函数，给出下列四个结论：

①若，恰 有2个零点；

②存在负数，使得恰有1个零点；

③存在负数，使得恰有3个零点；

④存在正数，使得恰有3个零点．

其中所有正确结论的序号是\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】①②④

【解析】

【分析】由可得出，考查直线与曲线的左、右支分别相切的情形，利用方程思想以及数形结合可判断各选项的正误.

【详解】对于①，当时，由，可得或，①正确；

对于②，考查直线与曲线相切于点，

对函数求导得，由题意可得，解得，

所以，存在，使得只有一个零点，②正确；

对于③，当直线过点时，，解得，

所以，当时，直线与曲线有两个交点，

若函数有三个零点，则直线与曲线有两个交点，

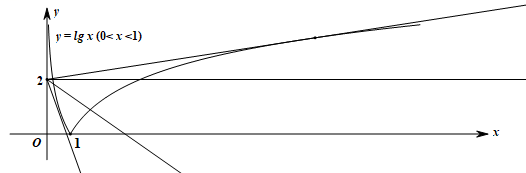
直线与曲线有一个交点，所以，，此不等式无解，

因此，不存在，使得函数有三个零点，③错误；

对于④，考查直线与曲线相切于点，

对函数求导得，由题意可得，解得，

所以，当时，函数有三个零点，④正确.



故答案为：①②④.

【点睛】思路点睛：已知函数的零点或方程的根的情况，求解参数的取值范围问题的本质都是研究函数的零点问题，求解此类问题的一般步骤：

（1）转化，即通过构造函数，把问题转化成所构造函数的零点问题；

（2）列式，即根据函数的零点存在定理或结合函数的图象列出关系式；

（3）得解，即由列出的式子求出参数的取值范围．

**三、解答题共6小题，共85分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．**

16. 在中，，．

（1）求；

（2）再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使存在且唯一确定，求边上中线的长．

条件①：；

条件②：的周长为；

条件③：的面积为；

【答案】（1）；（2）答案不唯一，具体见解析．

【解析】

【分析】（1）由正弦定理化边为角即可求解；

（2）若选择①：由正弦定理求解可得不存在；

若选择②：由正弦定理结合周长可求得外接圆半径，即可得出各边，再由余弦定理可求；

若选择③：由面积公式可求各边长，再由余弦定理可求.

【详解】（1），则由正弦定理可得，

，，，，

，解得；

（2）若选择①：由正弦定理结合（1）可得，

与矛盾，故这样的不存在；

若选择②：由（1）可得，

设的外接圆半径为，

则由正弦定理可得，

，

则周长，

解得，则，

由余弦定理可得边上的中线的长度为：

；

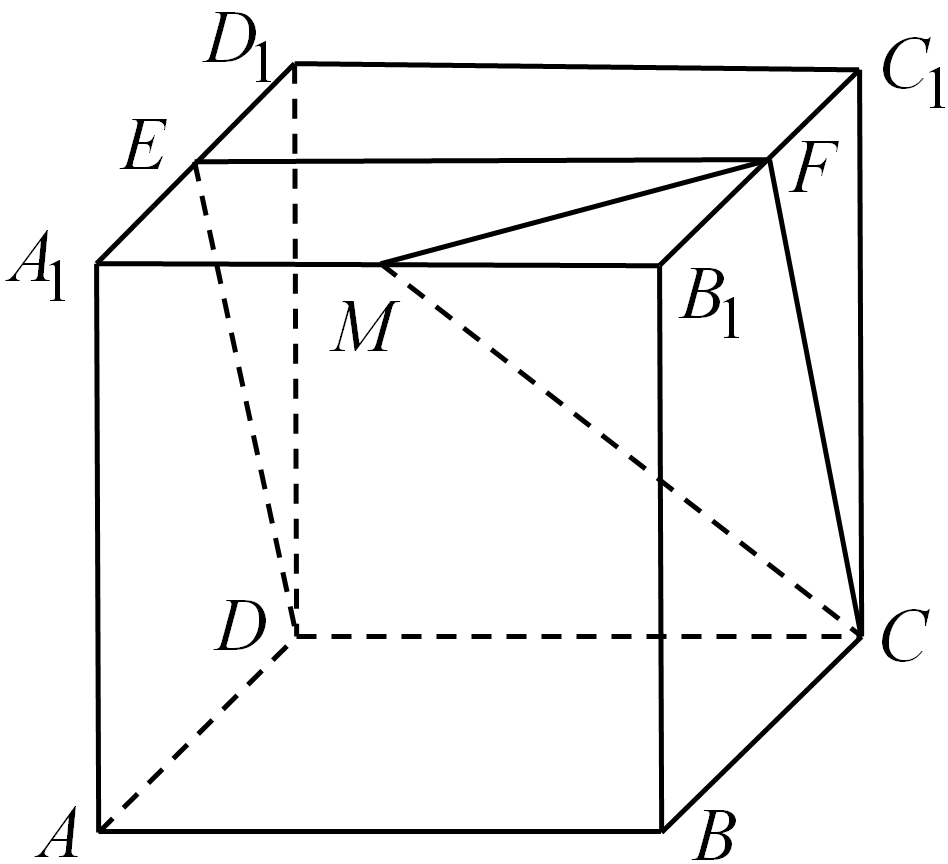
若选择③：由（1）可得，即，

则，解得，

则由余弦定理可得边上的中线的长度为：

.

17. 如图：在正方体中，为中点，与平面交于点．



（1）求证：为的中点；

（2）点是棱上一点，且二面角的余弦值为，求的值．

【答案】（1）证明见解析；（2）．

【解析】

【分析】(1)首先将平面进行扩展，然后结合所得的平面与直线的交点即可证得题中的结论；

(2)建立空间直角坐标系，利用空间直角坐标系求得相应平面的法向量，然后解方程即可求得实数的值.

【详解】(1)如图所示，取的中点，连结，

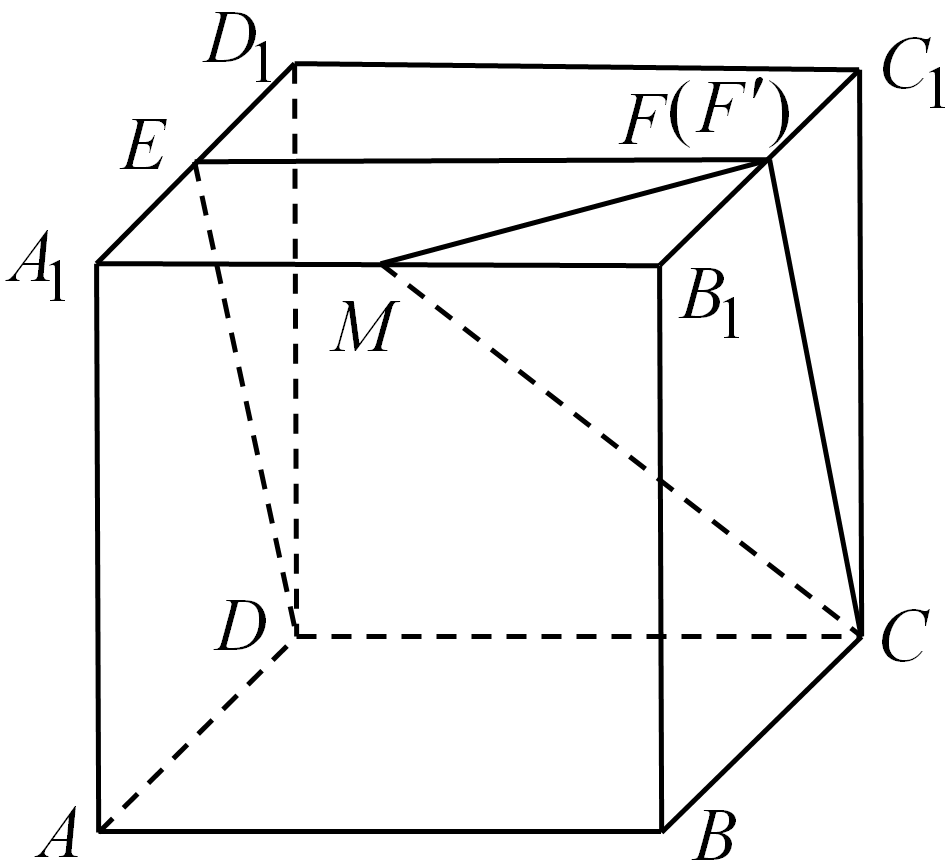
由于为正方体，为中点，故，

从而四点共面，即平面*CDE*即平面，

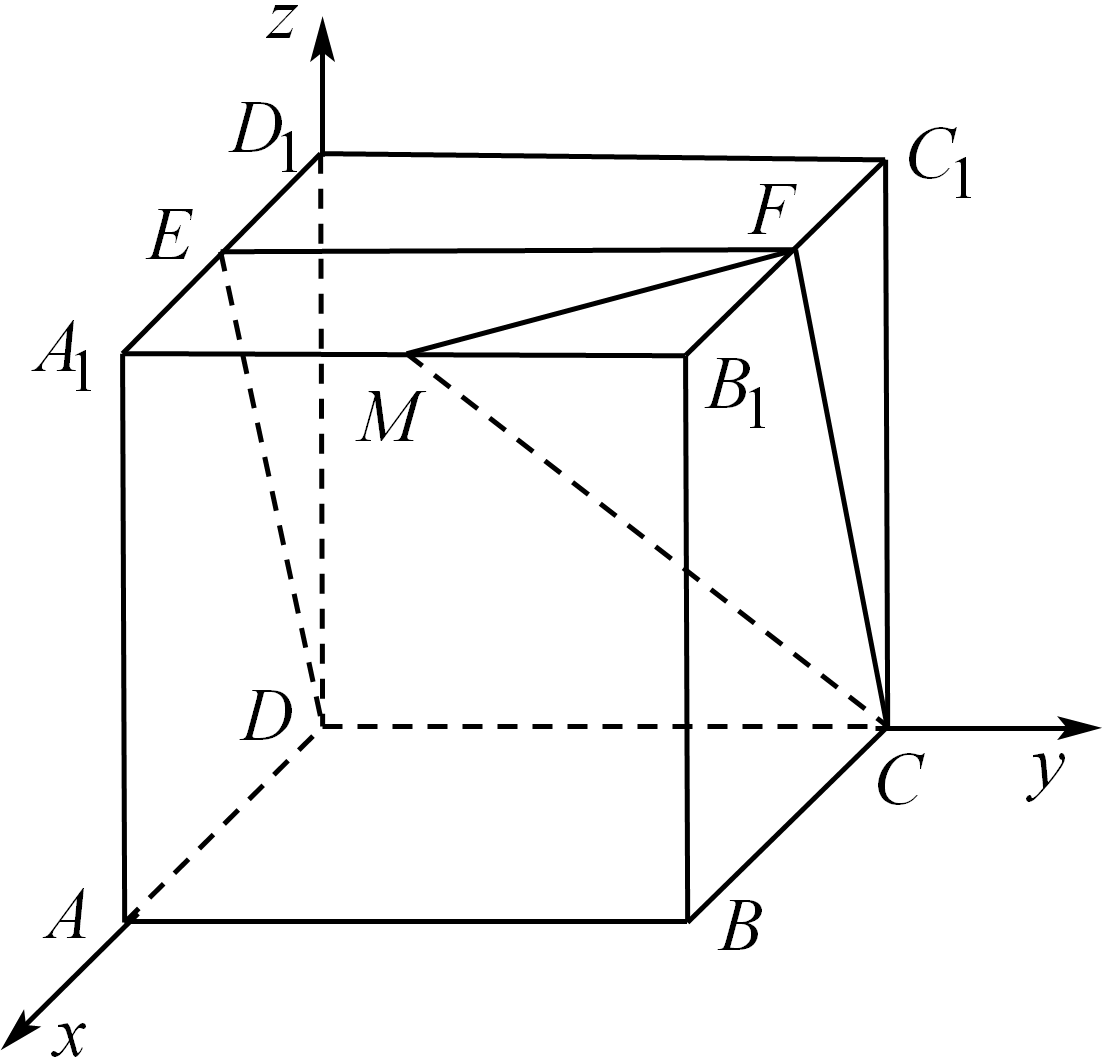
据此可得：直线交平面于点，

当直线与平面相交时只有唯一的交点，故点与点重合，

即点为中点.



(2)以点为坐标原点，方向分别为轴，轴，轴正方向，建立空间直角坐标系，



不妨设正方体的棱长为2，设，

则：，

从而：，

设平面的法向量为：，则：

，

令可得：，

设平面的法向量为：，则：

，

令可得：，

从而：，

则：，

整理可得：，故（舍去）.

【点睛】本题考查了立体几何中的线面关系和二面角的求解问题，意在考查学生的空间想象能力和逻辑推理能力，对于立体几何中角的计算问题，往往可以利用空间向量法，通过求解平面的法向量，利用向量的夹角公式求解.

18. 在核酸检测中, “*k*合1” 混采核酸检测是指：先将*k*个人的样本混合在一起进行1次检测,如果这*k*个人都没有感染新冠病毒，则检测结果为阴性，得到每人的检测结果都为阴性，检测结束:如果这*k*个人中有人感染新冠病毒，则检测结果为阳性，此时需对每人再进行1次检测,得到每人的检测结果，检测结束.

现对100人进行核酸检测，假设其中只有2人感染新冠病毒，并假设每次检测结果准确.

（I）将这100人随机分成10组，每组10人，且对每组都采用“10合1”混采核酸检测.

(i)如果感染新冠病毒的2人在同一组，求检测的总次数;

(ii)已知感染新冠病毒的2人分在同一组的概率为.设*X*是检测的总次数，求*X*的

分布列与数学期望E(X).

(II）将这100人随机分成20组，每组5人，且对每组都采用“5合1”混采核酸检测.设Y是检测的总次数，试判断数学期望E(*Y*)与(I)中E(X)的大小.(结论不要求证明)

【答案】（1）①次；②分布列见解析；期望为；（2）．

【解析】

【分析】（1）①由题设条件还原情境，即可得解；

②求出*X*取值情况，求出各情况下的概率，进而可得分布列，再由期望的公式即可得解；

（2）求出两名感染者在一组的概率，进而求出，即可得解.

【详解】（1）①对每组进行检测，需要10次；再对结果为阳性的组每个人进行检测，需要10次；

所以总检测次数为20次；

②由题意，可以取20，30，

，，

则的分布列:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

所以；

（2）由题意，可以取25，30，

两名感染者在同一组的概率为，不在同一组的概率为，

则.

19. 已知函数．

（1）若，求曲线在点处的切线方程；

（2）若在处取得极值，求的单调区间，以及其最大值与最小值．

【答案】（1）；（2）函数的增区间为、，单调递减区间为，最大值为，最小值为.

【解析】

【分析】（1）求出、的值，利用点斜式可得出所求切线的方程；

（2）由可求得实数的值，然后利用导数分析函数的单调性与极值，由此可得出结果.

【详解】（1）当时，，则，，，

此时，曲线在点处的切线方程为，即；

（2）因为，则，

由题意可得，解得，

故，，列表如下：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  | 增 | 极大值 | 减 | 极小值 | 增 |

所以，函数的增区间为、，单调递减区间为.

当时，；当时，.

所以，，.

20. 已知椭圆一个顶 点，以椭圆的四个顶点为顶点的四边形面积为．

（1）求椭圆*E*的方程；

（2）过点*P*(0，-3)的直线*l*斜率为k的直线与椭圆E交于不同的两点*B*，*C*，直线*AB*，AC分别与直线交*y*=-3交于点*M，N*，当|*PM*|+|*PN*|≤15时，求*k*的取值范围．

【答案】（1）；（2）．

【解析】

【分析】（1）根据椭圆所过的点及四个顶点围成的四边形的面积可求，从而可求椭圆的标准方程.

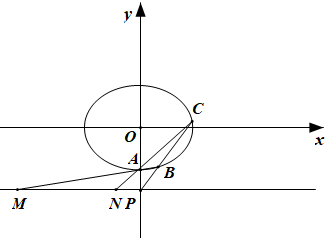
（2）设，求出直线的方程后可得的横坐标，从而可得，联立直线的方程和椭圆的方程，结合韦达定理化简，从而可求的范围，注意判别式的要求.

【详解】（1）因为椭圆过，故，

因为四个顶点围成的四边形的面积为，故，即，

故椭圆的标准方程为：.

（2）



设，

因为直线的斜率存在，故，

故直线，令，则，同理.

直线，由可得，

故，解得或.

又，故，所以

又



故即，

综上，或.

21. 设*p*为实数.若无穷数列满足如下三个性质，则称为数列：

①，且；

②；

③，．

（1）如果数列前4项为2，-2，-2，-1，那么是否可能为数列？说明理由；

（2）若数列是数列，求；

（3）设数列的前项和为.是否存在数列，使得恒成立？如果存在，求出所有的*p*；如果不存在，说明理由．

【答案】（1）不可以是数列；理由见解析；（2）；（3）存在；．

【解析】

【分析】(1)由题意考查的值即可说明数列不是数列；

(2)由题意首先确定数列的前4项，然后讨论计算即可确定的值；

(3)构造数列，易知数列是的，结合(2)中的结论求解不等式即可确定满足题意的实数的值.

【详解】(1)因   所以，

因 为所 以

所以数列，不可能是数列.

(2)性质①，

由性质③，因此或，或，

若，由性质②可知，即或，矛盾；

若，由有，矛盾.

因此只能是.

又因为或，所以或.

若，则，

不满足，舍去.

当，则前四项为:0，0，0，1，

下面用数学归纳法证明：

当时，经验证命题成立，假设当时命题成立，

当时：

若，则，利用性质③：

，此时可得：；

否则，若，取可得：，

而由性质②可得：，与矛盾.

同理可得：

，有；

，有；

，又因为，有

即当时命题成立，证毕.

综上可得：，.

(3)令，由性质③可知：

，

由于，

因此数列为数列.

由（2）可知:

若；

，，

因此，此时，，满足题意.

【点睛】本题属于数列中的“新定义问题”，“新定义”主要是指即时定义新概念、新公式、新定理、新法则、新运算五种，然后根据此新定义去解决问题，有时还需要用类比的方法去理解新的定义，这样有助于对新定义的透彻理解.但是，透过现象看本质，它们考查的还是基础数学知识，所以说“新题”不一定是“难题”，掌握好三基，以不变应万变才是制胜法宝.

